Code sujet : 285

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESCP BS

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Vendredi 30 avril 2021, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\1&1&1\end{pmatrix}$$

1) a) Calculer J^2 puis vérifier que $J^3=2J$.

b) En déduire les valeurs propres possibles de J.

c) Vérifier que les colonnes de la matrice P sont des vecteurs propres de J.

d) On pose $D_1=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&0&0\\0&0&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Montrer que $JP=PD_1$ et en déduire que J est diagonalisable.

e) En déduire que $J^2P=PD_1^2$.

Tournez la page S.V.P.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}$.

2) a) Vérifier que $K=J^2-I$.

b) Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que $A=aI+bJ+cK$.

c) En déduire que $A=J^2+2J$ puis établir l'existence d'une matrice diagonale D_2 que l'on explicitera, telle que $AP=PD_2$.

3) a) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il calcule et affiche la matrice A^n pour une valeur de l'entier naturel n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n:')
A=[---;---;---]
B=---
disp(B)
```

b) Pour $n=2$, le script précédent renvoie : $A^2=\begin{pmatrix}6&8&6\\8&12&8\\6&8&6\end{pmatrix}$.

Pour $n=3$, le script précédent renvoie : $A^3=\begin{pmatrix}28&40&28\\40&56&40\\28&40&28\end{pmatrix}$.

Pour $n=5$, donner, sans calculer A^5, un argument permettant de préciser laquelle des deux matrices B_1 ou B_2 suivantes est renvoyée par ce script :

$$B_1=\begin{pmatrix}656&928&656\\928&1312&928\\656&928&656\end{pmatrix}\qquad B_2=\begin{pmatrix}656&928&656\\928&1324&928\\656&928&656\end{pmatrix}$$

Exercice 2

On désigne par λ un réel strictement positif et par p un réel de $]0,1[$.

1) On considère une variable aléatoire Z suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Donner sans calcul la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

b) Donner sans calcul les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$.

c) En déduire la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}\,dx$ et $\int_0^{+\infty}\lambda x^2 e^{-\lambda x}\,dx$.

2) On considère la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\lambda(1-p)e^{-\lambda x}+\lambda^2 p x e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$.

a) Utiliser les questions précédentes pour montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ et donner sa valeur.

b) En déduire que f est une densité de probabilité.

c) On désigne par X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.

3) On note F la fonction de répartition de X.

a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'on a :

$$\forall x \geq 0,\ \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}\left(1-(1+\lambda x)\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$$

b) En déduire l'expression explicite de $F(x)$ pour tout réel x.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue à droite en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ et en déduire que f est dérivable à droite en 0 et donner le nombre dérivé à droite de f en 0, noté $f'_d(0)$.

2) a) Déterminer, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, l'expression de $f'(x)$ en fonction de x, où f' désigne la fonction dérivée de f.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis donner les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

c) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de f.

d) Vérifier que, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, on a $f''(x)=\dfrac{1}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x}$. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}_+$?

3) a) Calculer $\lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-(x-1)\right)=0$.

c) On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Donner l'équation de la droite asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et tracer l'allure de (C).

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0=1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

4) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n>0$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

d) Compléter les commandes suivantes pour qu'elles affichent le rang n à partir duquel $u_n \leq 10^{-3}$.

```
n=0
u=1
while u>0.001
u=------
n=------
end
disp(n)
```


Tournez la page S.V.P.

5) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a la relation : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln u_{n+1}$.

b) En déduire que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est divergente.

Exercice 4

On rappelle que la probabilité d'un événement B est notée P(B).

On dispose d'une urne U_0 contenant deux boules noires et deux boules blanches, et d'urnes U_1, U_2, U_3, ... contenant chacune deux boules blanches.

On effectue des tirages selon le protocole suivant :

- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_0, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_1.
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_1, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_2.
- On pioche au hasard deux boules dans l'urne U_2, une par une et sans remise, et on les place dans l'urne U_3, et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne U_n après y avoir introduit les boules piochées dans l'urne U_{n-1}, mais avant de procéder au tirage suivant.

On pose $X_0 = 2$.

1) a) Montrer que la loi de la variable aléatoire X_1 est donnée par :

$$P(X_1 = 1) = \frac{2}{3},\ P(X_1 = 2) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{6}$$

b) Calculer l'espérance de X_1.

2) Pour tout entier naturel k, on note A_k l'événement : « on pioche deux boules noires dans l'urne U_k ». Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, l'événement $(X_n = 2)$ à l'aide de certains des événements A_k et en déduire que $P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

3) a) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} P(X_n = 1) + \frac{2}{3} P(X_n = 2)$$

b) Montrer ensuite par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$P(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

c) Donner la valeur de $P(X_n = 0)$ en fonction de n.

4) Calculer, pour tout entier naturel n, l'espérance de X_n. Déterminer la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.