BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Code sujet : 285**

**Conception : ESCP Europe**

# MATHÉMATIQUES

OPTION : TECHNOLOGIQUE

Mercredi 6 mai 2015, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

- *L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.*
- *La probabilité d'un événement $B$ est notée $P(B)$.*

## EXERCICE 1

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que : $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

*On ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit $f(x)$.*

1. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que $g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ et $G$ une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   a) Pour tout réel $x > 0$, exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction $G$.
   b) Déduire de la question précédente que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$ où $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$.
   c) Calculer $f(1)$.

2.a) Établir pour tout réel $x \geqslant 1$, l'inégalité : $f(x) \geqslant \mathrm{e} \times \ln x$.
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3.a) Établir pour tout réel $x$ de l'intervalle $]\,0, 1]$, l'inégalité : $f(x) \leqslant \mathrm{e}^x \times \ln x$.
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

4. Dresser le tableau de variation de $f$.

5. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité 1 cm pour les abscisses et e cm pour les ordonnées). On rappelle que le nombre e est à peu près égal à 2,7.
   a) On note $f''$ la dérivée seconde de $f$. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f''(x)$.
   b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion $A$ et déterminer les coordonnées du point $A$.
   c) Écrire l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point $A$.
   d) Tracer l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$.

6.a) Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté $u_n$, vérifiant $\displaystyle\int_1^{u_n} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = n$.
   b) En utilisant les variations de la fonction $f$, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
   c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

## EXERCICE 2

Pour tout couple $(a, b)$ de $\mathbb{R}^2$, soit $M$ la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question, on choisit $a = b = -1$.
   a) La matrice $M$ est-elle inversible ?
   b) Calculer pour tout entier $n \geqslant 2$, la matrice $M^n$.
2. Dans cette question, on choisit $a = b$.
   a) La matrice $M$ est-elle inversible ?
   b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $M^n = (1+a)^{n-1}M$.
3. On revient au cas général où $a$ et $b$ sont des réels quelconques.
   Montrer que la matrice $M$ est inversible si et seulement si $a \neq b$.
4. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre $p$ avec $0 < p < 1$. On pose : $q = 1 - p$.
   Soit $N$ la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et $A$ l'événement : “ la matrice $N$ est inversible ” .
   a) Établir la relation : $P([X = Y]) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) \times P([Y = k])$.
   b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$.
   c) En déduire $P(A)$ en fonction de $q$.
5. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1.
   Dans cette question, on considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres $n$ et $\frac{1}{2}$.
   Soit $N$ la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et $A$ l'événement : “ la matrice $N$ est inversible ”.
   a) Pour $x$ réel, écrire les développements de $(x+1)^n$ et $(x+1)^{2n}$ à l'aide de la formule du binôme.
   b) En utilisant l'identité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$, montrer que l'on a : $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

c) En déduire la relation : $P([X = Y]) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

d) Calculer $P(A)$ en fonction de $n$.

## EXERCICE 3

1. Soit $T$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
Donner sans calcul les valeurs de l'espérance $E(T)$ et de la variance $V(T)$ de la variable aléatoire $T$.

2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \begin{cases} t\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que $f$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire $X$ à densité.

b) En utilisant la question 1, montrer que la variable aléatoire $X$ admet une espérance et donner sa valeur.

3. Soit $F$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$.

Montrer que l'on a : pour tout $x$ réel, $F(x) = \begin{cases} 1-(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Soit $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes et suivant toutes les deux la même loi que $X$.
Soit $Z$ la variable aléatoire définie par $Z = \min(X_1, X_2)$.

4.a) Justifier que pour tout $x$ réel, on a : $P([Z > x]) = P([X_1 > x]) \times P([X_2 > x])$.

b) Déterminer la fonction de répartition $H$ de la variable aléatoire $Z$.

c) Montrer qu'une densité $h$ de $Z$ est donnée par : $h(x) = \begin{cases} 2\,x(x+1)\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

5. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$g(x) = -\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}.$$

On note $g'$ la fonction dérivée de la fonction $g$.

a) Pour tout $x$ réel, calculer $g'(x)$.

b) En déduire que l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire $Z$ est égale à $\dfrac{5}{4}$.

6. Soit $W$ la variable aléatoire définie par $W = \max(X_1, X_2)$.

a) Exprimer la variable aléatoire $Z + W$ en fonction de $X_1$ et $X_2$.

b) En déduire la valeur de l'espérance $E(W)$ de la variable aléatoire $W$.

c) Exprimer la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$ en fonction de $Z$ et $W$.

d) En déduire la valeur de l'espérance $E(|X_1 - X_2|)$ de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

## EXERCICE 4

*Soit $M$ une matrice carrée d'ordre 3 et $I$ la matrice unité d'ordre 3. On pose par convention : $M^0 = I$.*

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+3} = 2\,u_{n+2} - \frac{5}{4}\,u_{n+1} + \frac{1}{4}\,u_n.$$

Soit $A$ la matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel $n$, soit $X_n$ la matrice à trois lignes et une colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $X_0$ et $X_1$.

2.a) Justifier pour tout entier naturel $n$, l'égalité : $X_{n+1} = A\,X_n$.

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire pour tout entier naturel $n$, la relation : $X_n = A^n X_0$.

3. Soit $P$, $Q$ et $T$ les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit $PQ$. En déduire que la matrice $P$ est inversible et déterminer sa matrice inverse $P^{-1}$.

b) Calculer les produits $PT$ et $AP$. En déduire pour tout entier naturel $n$, l'égalité : $A^n = PT^nP^{-1}$.

4. Soit $D$ la matrice définie par : $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose : $N = T - D$.

a) Déterminer pour tout entier $k \geqslant 2$, la matrice $N^k$.

b) Vérifier que $DN = ND$ et montrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) En déduire pour tout entier naturel $n$, l'expression de la matrice $A^n$.

5.a) Déduire des questions précédentes l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$.



IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1197 – D'après documents fournis