BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 285

Conception : ESCP Europe

MATHÉMATIQUES

OPTION : TECHNOLOGIQUE

Mercredi 7 mai 2014, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

- *L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.*
- *La probabilité d'un événement G est notée $P(G)$.*

EXERCICE 1

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{-2(t-a)} & \text{si } t \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1.a) Soit B un réel supérieur ou égal à a. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^B 2\,\mathrm{e}^{-2(t-a)}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-2(t-a)}\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

3. Montrer que la fonction de répartition F_X de X est donnée par : $F_X(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-2(x-a)} & \text{si } x \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

4. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = X - a$.

a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c) Donner la valeur de l'espérance de Y.

d) En déduire que X admet une espérance et donner sa valeur.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1+t)\big)^n \, dt$.

1. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : pour tout $t \geqslant 0$, $g(t) = (1+t)\ln(1+t) - t$.
   a) On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.
   b) En déduire la valeur de u_1.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles telle que : $f(t) = \ln(1+t)$.
   a) On note f' et f'' respectivement, les dérivées première et seconde de f.
   Calculer pour tout réel t de $[0,1]$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
   b) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0,1]$ et tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on donne : $\ln 2 \simeq 0,7$).
   c) Montrer que la fonction f est concave sur $[0,1]$.

3.a) Justifier pour tout réel t de $[0,1]$, l'encadrement suivant : $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln 2$.
   b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$.
   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0.

4.a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$u_{n+1} = 2\big(\ln 2\big)^{n+1} - (n+1)\, u_n \,.$$

   (On pourra remarquer qu'une primitive de la fonction $t \longmapsto 1$ est $t \longmapsto 1+t$)
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $(n+1)u_n \leqslant 2\big(\ln 2\big)^{n+1}$.
   c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   d) En utilisant la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $(n+2)u_n \geqslant 2\big(\ln 2\big)^{n+1}$.
   e) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n u_n}{2\big(\ln 2\big)^{n+1}}$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.a) On note f' la fonction dérivée de f. Calculer pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   Placer les réels 1 et $f(1)$ dans ce tableau.

2.a) Montrer que pour tout entier naturel n, le réel u_n appartient à l'intervalle $[0,1]$.
   b) Établir pour tout réel x de $[0,1]$, l'inégalité suivante : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{3}{4}$.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{3}{4}|u_n - 1|$.
   d) Établir pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $|u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
   e) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

3. Soit A, J et I les matrices d'ordre 2 suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que $J^2 = 2J$.

   b) Établir pour tout entier naturel n, la relation suivante : $A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$ (on rappelle que $A^0 = I$).

   c) Donner sous forme matricielle, l'expression de A^n en fonction de n.

4. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par :

$$p_0 = 1,\ q_0 = 2, \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \begin{cases} p_{n+1} = 2\,p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2\,q_n \end{cases}.$$

   On considère pour tout n de $\mathbb{N}$, la matrice à deux lignes et une colonne X_n définie par : $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

   a) Établir par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $X_n = A^n X_0$.

   b) En déduire l'expression de X_n en fonction de n et donner les valeurs de p_n et de q_n en fonction de n.

5.a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'égalité : $u_n = \frac{p_n}{q_n}$.

   b) Donner l'expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 4

Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, numérotés 1, 2, 3 et 4, d'un carré selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet 1.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 0$) la puce se trouve sur le sommet 1, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$) la puce se trouve sur le sommet 2, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$) la puce se trouve sur le sommet 3, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$) la puce se trouve sur le sommet 4, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet occupé par la puce à l'instant n et on a donc $P([X_0 = 1]) = 1$.

1.a) Déterminer la loi de X_1.

   b) Calculer l'espérance et la variance de X_1.

2. Déterminer la loi de X_2.

3.a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P([X_{n+1} = 1]) = \frac{2}{3}\,P([X_n = 1]) + \frac{1}{2}\,P([X_n = 2]).$$

   b) Exprimer de même, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $P([X_{n+1} = 2])$, $P([X_{n+1} = 3])$, $P([X_{n+1} = 4])$ en fonction de $P([X_n = 1])$, $P([X_n = 2])$, $P([X_n = 3])$ et $P([X_n = 4])$.

c) Vérifier que les relations précédentes sont encore valables pour $n = 1$ et $n = 0$.

d) Que vaut pour tout n de $\mathbb{N}$, la somme : $P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) + P([X_n = 3]) + P([X_n = 4])$?

4. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, on note U_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} P([X_n = 1]) \\ P([X_n = 2]) \\ P([X_n = 3]) \end{pmatrix}.$$

De plus, on pose : $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant les relations trouvées précédemment, établir pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation : $U_{n+1} = AU_n + B$.

5.a) Déterminer une matrice L à trois lignes et une colonne vérifiant : $L = AL + B$.

b) Établir pour tout entier naturel n, la relation suivante : $U_n = A^n(U_0 - L) + L$.

6. On pose $C = 6A$. Soit R, D et Q les matrices d'ordre 3 définies par :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer RQ. En déduire que R est inversible et donner R^{-1}, où R^{-1} désigne la matrice inverse de la matrice R.

b) Calculer $CR - RD$.

c) En déduire pour tout entier naturel n, la relation suivante : $A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$.

7. On admet que la limite de la matrice U_n lorsque n tend vers $+\infty$, est une matrice U dont les coefficients sont obtenus en prenant la limite des coefficients de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Déterminer U et préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} P([X_n = 4])$.