BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2010

Conception : E.S.C.P. / EUROPE **285**

OPTION TECHNOLOGIQUE **CCIP_MATT**

MATHEMATIQUES

Lundi 10 mai 2010, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction h_n sur $[0,1]$ par la relation suivante : pour tout réel x de $[0,1]$,

$$h_n(x) = \frac{x^n}{x^2+3x+2} \text{ si } n \text{ est supérieur ou égal à 1, et } h_0(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$$

1. (a) Établir pour tout réel x de $[0,1]$, l'inégalité : $x^2+3x+2 \geqslant 2$.
   (b) En déduire que la fonction h_n est continue sur $[0,1]$ pour tout entier naturel n.
2. On définit pour tout x de $[0,1]$, la fonction g par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$.

   On pose pour tout entier naturel n, $u_n = \displaystyle\int_0^1 h_n(t)dt$.

   (a) On note g' la dérivée de g. Montrer que pour tout x de $[0,1]$, on a : $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.
   (b) En déduire que $u_0 = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$.
3. On définit pour tout x de $[0,1]$, la fonction k par $k(x) = \ln(x^2+3x+2)$.
   (a) Soit k' la dérivée de k. Calculer pour tout x de $[0,1]$, $k'(x)$. En déduire la valeur de $2u_1+3u_0$.
   (b) Donner la valeur de u_1.
4. Calculer $u_2+3u_1+2u_0$. En déduire la valeur de u_2.

5. (a) Établir pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $u_n \geqslant 0$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
   (c) Établir pour tout entier naturel n, l'inégalité : $u_n \leqslant \frac{1}{2(n+1)}$.
   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
6. (a) Calculer pour tout entier naturel n, $u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n$ en fonction de n.
   (b) En utilisant la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, en déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'encadrement suivant :
   $$\frac{1}{6(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{6(n-1)}.$$
   (c) Déterminer la limite de nu_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

1. Soit A, J et I les trois matrices carrées d'ordre 2 définies par :
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que $A = aJ + bI$.
   (b) Calculer J^2 en fonction de J.
   (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, la relation suivante :
   $$A^n = (-2)^n I + \frac{1}{2}\left[4^n - (-2)^n\right] J$$
   (d) Donner l'expression explicite de A^n sous forme d'une matrice d'ordre 2.
2. On note $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ les deux suites définies par $v_0 = 3$, $w_0 = 1$ et les relations suivantes, valables pour tout entier naturel n :
   $$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + 3w_n \\ w_{n+1} = 3v_n + w_n \end{cases}.$$
   On considère pour tout n de $\mathbb{N}$, la matrice X_n à deux lignes et une colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer X_0.
   (b) Établir par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $X_n = A^n X_0$.
   (c) En déduire l'expression de X_n en fonction de n.
   (d) Calculer les valeurs de v_n et de w_n en fonction de n.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 3$ et la relation suivante, valable pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{3u_n + 1}.$$
   (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'égalité suivante : $u_n = \frac{v_n}{w_n}$.
   (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 3

La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$, et pour tout événement B vérifiant $P(B) \neq 0$, on note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Un mobile se déplace aléatoirement le long d'un axe horizontal d'origine O, sur des points à coordonnées entières, positives ou nulles.
Les déplacements sont effectués selon le protocole suivant :
- à l'instant zéro, le mobile est sur l'origine O d'abscisse 0 ;
- si, pour tout entier naturel n, le mobile se trouve à l'instant n sur le point d'abscisse k ($0 \leqslant k \leqslant n$), alors il sera à l'instant $n+1$, soit sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$, soit sur le point O avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n, soit X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n. Ainsi, $X_0 = 0$.

On note $E(X_n)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n.

1. Vérifier que X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$. Que vaut $E(X_1)$?
2. (a) Montrer que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_2 est $\{0, 1, 2\}$.
   (b) Montrer que l'ensemble $\{[X_1 = 1], [X_1 = 0]\}$ forme un système complet d'événements. En déduire les égalités suivantes :
   $$P([X_2 = 0]) = \frac{2}{3} \quad , \quad P([X_2 = 1]) = \frac{2}{9} \quad \text{et} \quad P([X_2 = 2]) = \frac{1}{9}$$
   (c) Calculer $E(X_2)$.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n.
4. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout k de $[\![1, n]\!]$, on considère les événements $[X_n = k]$ et $[X_{n-1} = k-1]$.
   (a) Établir l'inclusion d'événements suivante : $[X_n = k] \subset [X_{n-1} = k-1]$.
   (b) En déduire l'égalité : $[X_n = k] = [X_n = k] \cap [X_{n-1} = k-1]$.
   (c) Établir l'égalité : $P([X_n = k]) = \frac{1}{3} P([X_{n-1} = k-1])$.
   (d) Déduire du résultat précédent que l'on a : $P([X_n = 0]) = \frac{2}{3}$.
5. (a) En utilisant la question 4.(c), montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur k, que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout entier k de $[\![0, n]\!]$, on a :
   $$P([X_n = k]) = \left(\frac{1}{3}\right)^k P([X_{n-k} = 0])$$
   (b) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de $P([X_n = n])$ en fonction de n.
   (c) Donner pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la loi de la variable aléatoire X_n.
6. (a) En utilisant la définition de $E(X_n)$ et la question 4.(c), montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :
   $$E(X_n) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} k P([X_{n-1} = k-1])$$
   (b) En déduire la relation de récurrence : $E(X_n) = \frac{1}{3} E(X_{n-1}) + \frac{1}{3}$.
   (c) Déterminer l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n.

Exercice 4

Dans tout l'exercice, on note $E(Z)$ et $V(Z)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Z.

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

1. (a) Calculer la dérivée de la fonction m définie pour tout réel x positif ou nul par : $m(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   (b) Soit A un réel strictement positif. On pose : $I(A) = \int_0^A xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
   Déduire de la question précédente la valeur de $I(A)$.
   Calculer $\lim\limits_{A \to +\infty} I(A)$.

   (c) En déduire que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère dans la suite de l'exercice. une variable aléatoire X à valeurs positives admettant f pour densité.

2. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée ($E(U) = 0$), réduite ($V(U) = 1$). On rappelle qu'une densité g de U est donnée pour tout x réel par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   (a) Rappeler la relation liant $V(U)$, $E(U^2)$ et $(E(U))^2$. En déduire la valeur de $E(U^2)$.

   (b) En écrivant $E(U^2)$ sous forme d'intégrale, donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

   (c) Soit h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$.
   Montrer que la fonction h est paire.
   En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ et celle de $E(X)$.

3. Soit A un réel strictement positif.

   (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, l'égalité suivante :

   $$\int_0^A x^3e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -A^2e^{-\frac{A^2}{2}} + 2\int_0^A xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

   (b) En déduire que $\int_0^{+\infty} x^3e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 2$.

   (c) Calculer $V(X)$.

4. On pose : $Y = \frac{X^2}{2}$. On note F la fonction de répartition de X et G la fonction de répartition de Y.

   (a) Établir pour tout réel x positif, l'égalité suivante : $G(x) = F(\sqrt{2x})$.

   (b) En déduire que Y suit la loi exponentielle.

   (c) Calculer $E(Y)$ et retrouver ainsi la valeur de $V(X)$.