



Code épreuve : 294

**BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES**

---

**Conception : E.S.C. CHAMBERY**

**MATHEMATIQUES**

**OPTION TECHNOLOGIQUE**

---

**N.B.**

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

## Exercice 1

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par ses deux premiers termes  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 2$  ainsi que la relation :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

Soit les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

- Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = AU_n$ .
  - Etablir, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = A^n U_0$ .
- On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  et  $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .
  - Vérifier que  $AP = PT$ .
  - Etablir que pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n P = PT^n$ .
- On pose  $B = T - \frac{1}{2}I$ .
  - Donner les quatre coefficients de  $B$  puis calculer  $B^2$ .  
Donner  $B^k$  pour tout entier  $k \geq 2$ .
  - En utilisant la formule du binôme, montrer que :  $\forall n \geq 1, T^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{n}{2^{n-1}}B$ .  
Cette formule est-elle aussi vraie pour  $n = 0$  ?
  - En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , les quatre coefficients de  $T^n$ .
- Justifier que  $P$  est inversible et vérifier que :  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ .
  - Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel  $n$ , les quatre coefficients de  $A^n$ .
- Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

## Exercice 2

### Partie I - Etude d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - e^{-x} - 1$  et  $C$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

- Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
  - Etablir que  $C$  admet une droite asymptote  $D$  au voisinage de  $+\infty$  et préciser une équation de  $D$ .
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Que pouvez-vous en déduire sur la courbe  $C$  ?
- Etudier le sens de variation de  $f$  et dresser le tableau des variations de  $f$  en y faisant figurer les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- Etablir que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$  notée  $\alpha$ .
  - Justifier que  $\alpha \in [1, 2]$ . On pourra utiliser les valeurs approchées :  $e^{-1} \simeq 0,4$  et  $e^{-2} \simeq 0,1$ .
- Tracer l'allure de  $C$  et de  $D$  en faisant figurer le réel  $\alpha$ . On pourra utiliser la valeur approchée  $\alpha \simeq 1,3$ .

## Partie II - Approximation de $\alpha$

On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = e^{-x} + 1$ . On définit également la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = h(u_n)$ .

1. Montrer que l'équation  $h(x) = x$  admet comme unique solution sur  $\mathbb{R}$  le réel  $\alpha$  défini en I.3.

2. Montrer que pour tout réel  $x$  de  $[1, 2]$ ,  $-\frac{1}{e} \leq h'(x) < 0$ .

En déduire que, pour tout réel  $x$  de  $[1, 2]$ ,  $|h'(x)| \leq \frac{1}{e}$ .

3. a) Montrer que  $h$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

b) Prouver par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq 2$ .

*On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes :  $h(1) \simeq 1,4$  et  $h(2) \simeq 1,1$ .*

4. a) Énoncer avec précision le théorème de l'inégalité des accroissements finis.

b) Établir que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$ .

c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$ .

5. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et préciser sa limite.

## Exercice 3

Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de vingt questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que :

- L'élève A ne connaît que 60% de son cours. C'est-à-dire que pour chaque question la probabilité qu'il connaisse la réponse est  $\frac{60}{100}$ .
- Lorsqu'il ne connaît pas une réponse à une question, il répond au hasard.
- Les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les événements

- $R$  : « l'élève A connaît la réponse à la première question ».
- $J$  : « l'élève A répond juste à la première question ».

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que  $P(J) = \frac{11}{15}$ .

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève A aux vingt questions.

2. Reconnaître la loi de  $X$ . On donnera les valeurs prises par  $X$  et pour chacune de ces valeurs  $k$  la valeur de  $P(X = k)$ .
3. Donner  $E(X)$  et  $V(X)$ , l'espérance et la variance de  $X$ .
4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer deux points par réponse fautive.

Soit  $N$  la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.

- a) Justifier l'égalité :  $N = 3X - 40$ .
- b) En déduire l'espérance de  $N$  ainsi que sa variance.

L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.

5. Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.
  - a) Déterminer la loi de  $Y$ .
  - b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.
  - c) En moyenne, entre l'élève A et l'élève B quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note ?

## Exercice 4

Dans cet exercice, on s'intéresse à la durée de vie d'un composant électronique comme somme de son temps de stockage noté  $X$  et de son temps de fonctionnement noté  $Y$ .

### Partie I

On considère un composant électronique pour lequel le temps écoulé (en années) entre la fin de son processus de fabrication et sa première utilisation est une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$  donnée par :

$$\begin{cases} f(t) = 1 - \frac{1}{2}t & \text{si } t \in [0, 2] \\ f(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité.
2. Soit  $F$  la fonction de répartition de  $X$ . Calculer  $F(x)$  en distinguant les cas :  $x < 0$ ,  $0 \leq x \leq 2$  et  $x > 2$ .
3. Calculer les probabilités suivantes :  $P(X \geq 1)$ ,  $P\left(1 \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$  et  $P_{(X \geq 1)}\left(X \leq \frac{3}{2}\right)$ .
4. Montrer que  $E(X) = \frac{2}{3}$ .

### Partie II

On admet que la durée de vie en années du composant électronique à partir de sa première utilisation est une variable aléatoire  $Y$  de densité  $g$  donnée par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ g(t) = \frac{2}{5}e^{-\frac{2}{5}t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. a) Calculer pour tout réel  $x$  positif,  $\int_0^x g(t) dt$ .  
b) En déduire la fonction de répartition  $G$  de  $Y$ .
2. Justifier que  $g$  est une densité de probabilité d'une loi usuelle. Préciser le paramètre de cette loi.  
Calculer l'espérance de  $Y$ .
3. Le composant électronique est garanti pendant 2 ans à partir de sa première utilisation. Quelle est la probabilité qu'il dure au-delà de la garantie ?
4. Soit  $Z$  la variable aléatoire égale au temps en années écoulé entre la fin de fabrication du composant et sa fin de vie.
  - a) Exprimer  $Z$  en fonction de  $X$  et de  $Y$ .
  - b) En déduire le temps moyen écoulé entre la fin de fabrication du composant et sa fin de vie.