ECRICOME voie T 2020

écricome

EXERCICE 1

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}.$$

1. Recopier et compléter les trois lignes incomplètes du script Scilab ci-dessous pour qu'il calcule u_n pour n entier naturel entré par l'utilisateur :

```
n = input('Entrer n : ')
u = 0 ; v = 1
for k = ......
        w = u
        u = ......
        v = ......
end
disp(u)
```

2. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique de raison 8. En déduire l'expression de s_n en fonction de n.
3. On pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = (-1)^n u_n \qquad \text{et} \qquad t_n = v_n - v_{n+1}.$$

   (a) Exprimer t_n en fonction de s_n pour tout entier naturel n.

   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, on a $t_n = (-8)^n$.
4. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(-8)^i$.

   (b) Justifier que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(v_i - v_{i+1}) = -v_n$.

   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}.$$

Partie B

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme $Q(X) = X^2 - 7X - 8$ est un polynôme annulateur de M.
2. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et de I.

3.(a) On pose : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Vérifier que : $M^0 = a_0M + b_0I$.

(b) Déterminer deux réels a_1 et b_1 tels que : $M^1 = a_1M + b_1I$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_nM + b_nI$. Prouver alors que :

$$M^{n+1} = a_n(7M + 8I) + b_nM$$

En déduire deux réels a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n tels que $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$.

(d) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = u_n,$$

où (u_n) est la suite définie dans la Partie A.

Partie C

Soient X et Y deux variables aléatoires pour lesquelles on suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	2β	3β	3β
2	3β	2β	3β
3	3β	3β	2β

1. Déterminer la valeur du réel β pour que ce tableau représente effectivement la loi du couple (X, Y).
2. Reconnaître les lois marginales de X et Y. En déduire les espérances $E(X)$ et $E(Y)$.

3.(a) Vérifier que la covariance de X et Y est donnée par :

$$\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{12}.$$

(b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 2

Partie A

1. Justifier que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, d'inconnue réelle x, n'admet aucune solution.

On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f.

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de f.
   On remarquera en particulier que f est croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$.
4. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
   (b) Montrer que pour tout réel x de $[-1, +\infty[$, on a : $f(x) \leqslant x$.
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.
5. Tracer l'allure de $(\mathcal{C}_f)$ et (T) dans un repère orthonormé.
   On soignera en particulier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T).

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}.$$

1. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}.$$

   En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

2. Montrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser sa limite.
4. Recopier et compléter le script du programme Scilab suivant, pour qu'il affiche le plus petit entier naturel non nul n tel que $u_n \leqslant 1/1000$.

```
function y=f(x)
        y = x/(1+x+x^2)
endfunction
u = ......
n = ......
while u ......
        u = ......
        n = ......
end
disp(......)
```

Partie C

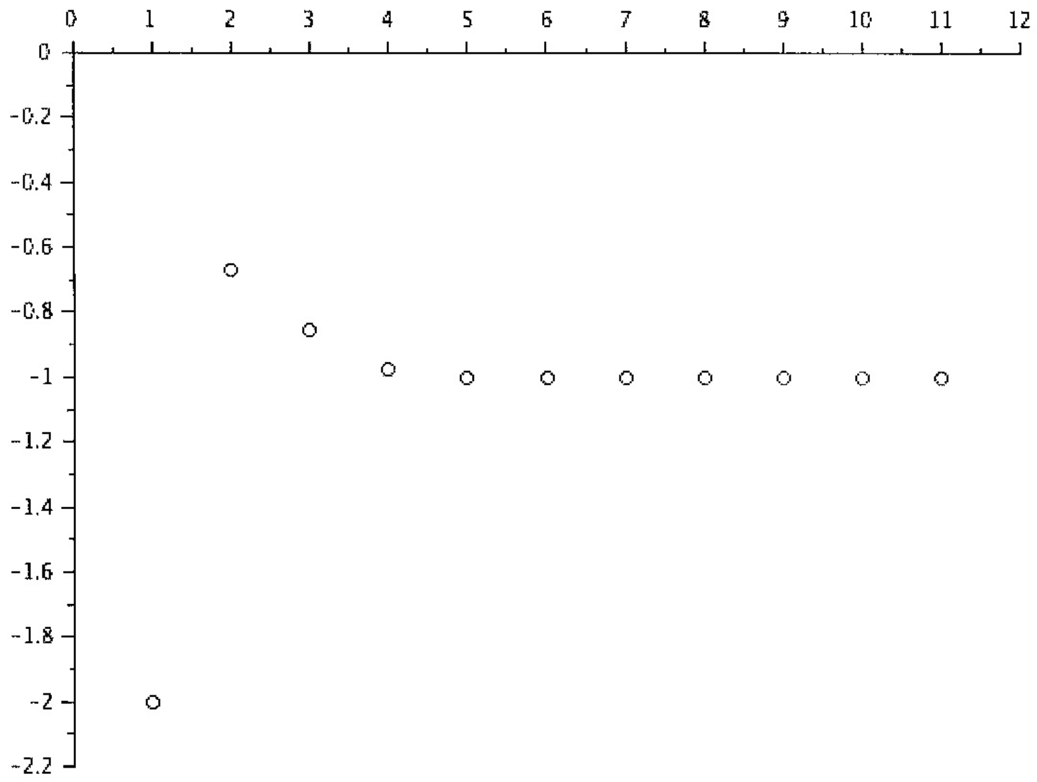
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$v_1 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1 + v_n + v_n^2}.$$

1. En utilisant la question 3 de la Partie A, démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geqslant 2,\ -1 \leqslant v_n \leqslant 0$$

2. En utilisant la question 4 de la Partie A, montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. À l'aide de Scilab, on trace les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et on obtient la figure ci-dessous.
   Conjecturer alors la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.



5.(a) Résoudre l'équation $f(x) = -1$, d'inconnue réelle x.

(b) Montrer par l'absurde que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \neq -1.$$

EXERCICE 3

Un bureau de poste dispose de deux guichets. Trois clients notés A, B, C arrivent en même temps. Les clients A et B se font servir tandis que C attend, puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit les variables aléatoires X, Y, Z égales à la durée en minutes de l'opération des clients A, B et C respectivement lorsqu'ils sont au guichet.
On fixe a et b deux réels strictement positifs, et on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre a, et que Y suit une loi exponentielle de paramètre b.
On suppose enfin que X et Y sont indépendantes.

1. Rappeler l'expression de la fonction de répartition F de X, et donner l'expression d'une densité f de X. Préciser les valeurs de l'espérance et de la variance de X.
2. On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente en minutes du client C avant de parvenir à un des guichets. La variable aléatoire T prend donc **la plus petite** des valeurs prises par X et Y.
   (a) Expliquer pour tout réel x, l'égalité $[T > x] = [X > x] \cap [Y > x]$.
   (b) Déterminer la probabilité $P(T > x)$.
   (c) En déduire que pour tout réel x :
   $$P(T \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-(a+b)x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
   Reconnaître la loi de T et préciser son(ses) paramètre(s).
   (d) Calculer la probabilité que le client C ait à son arrivée à la poste à attendre plus de 5 minutes avant de parvenir au guichet, sachant qu'il sait qu'il attendra déjà au moins 2 minutes.
3. On rappelle que, pour n un entier naturel non nul, et `lambda` un réel strictement positif, l'instruction `grand(1,n,'exp',1/lambda)` simule n fois une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre `lambda` et stocke les n réalisations ainsi obtenues dans une matrice.
   On considère le code Scilab suivant :

```
function T = simul(a,b)
        X = grand(1,10000,'exp',1/a)
        Y = grand(1,10000,'exp',1/b)
        T = X
        for k = ......
                if ...... then
                        T(k) = ......
                end
        end
endfunction
a = input('a :  ')
b = input('b :  ')
T = simul(a,b)
```

   (a) Compléter le code de la fonction `simul` pour qu'elle construise une matrice `T` contenant 10000 réalisations de la variable aléatoire T.
   (b) Laquelle de ces deux instructions est la plus adaptée pour représenter graphiquement la répartition des simulations obtenues pour la variable T par le code Scilab précédent :

   `histplot(0:max(T),T)` ou `bar(T)` ?

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $a = b = \frac{1}{2}$, et on suppose que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle, de paramètre 1, la variable aléatoire Z étant indépendante de X et Y.
On s'intéresse à $V = T + Z$ qui représente le temps total passé par le client C dans la poste, attente et service compris.

4. On s'intéresse à la fonction Scilab suivante :

```
function f = simul2()
        T = simul(1/2,1/2)
        Z = grand(1,10000,'exp',1)
        n=0
        for k = 1:10000
                if T(k)+Z(k) > 2 then
                        n=n+1
                end
        end
        f=n/10000
endfunction
```

On lance la fonction `simul2` plusieurs fois de suite, et on obtient les résultats suivants :

0.4045   0.4151   0.4221   0.4096   0.4188

(a) Que retourne la fonction `simul2` ?
On pourra utiliser la définition de la variable aléatoire V.

(b) On constate que les résultats renvoyés sont différents mais relativement proches. Sans démonstration, indiquer quel théorème de probabilité assure ce phénomène.

5. On admet que V est encore une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $A > 0$:

$$\int_0^A g(x)dx = 1 - e^{-A} - Ae^{-A}.$$

(b) Pour tout réel $A > 0$, calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^A xg(x)dx$.

(c) Vérifier que g est bien une densité de probabilité.

(d) Calculer $P(V \leqslant 2)$. En déduire la valeur de $P(V > 2)$.
On donne : $e^{-2} \simeq 0,14$. En déduire alors une valeur approchée de $P(V > 2)$.
Le résultat vous semble-t-il cohérent avec les résultats Scilab de la question 4 ?

(e) Montrer que V admet une espérance et donner sa valeur.