

3

prépa

Mathématiques

Option Technologique

● **Mardi 16 avril 2019 de 8h00 à 12h00**

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 6 pages.

CONSIGNES

TOUTES LES COPIES DOIVENT COMPORTER UN CODE-BARRES D'IDENTIFICATION.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ÉCRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

EXERCICE 1

Partie A

Soient A et P les matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On considère les matrices : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que U , V et W sont des vecteurs propres de A et préciser leurs valeurs propres associées.

2. Calculer P^2 . En déduire que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1} .

- 3.(a) Déterminer la matrice D telle que $D = P^{-1}AP$.

(b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $A^n = PD^nP$.

(c) En déduire que pour tout nombre entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^n & 0 \\ 3^n - 2^{n+1} + 1 & 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix}.$$

Partie B

Une entreprise de restauration collective propose trois formules de repas à n clients, où n est un entier naturel non nul.

Chacun des clients choisit exactement **une** de ces trois formules au hasard et de façon équiprobable puis envoie un bon de commande à l'entreprise. L'entreprise réceptionne alors pour chacun de ses n clients son bon de commande et lui livre la formule choisie.

On suppose que les choix de formule des clients sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, on note :

- A_k l'événement : « après réception du $k^{\text{ième}}$ bon, une seule formule a été choisie » ;
- B_k l'événement : « après réception du $k^{\text{ième}}$ bon, exactement deux formules ont été choisies » ;
- C_k l'événement : « après réception du $k^{\text{ième}}$ bon, les trois formules ont été choisies ».

Enfin, on pose pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$: $a_k = P(A_k)$, $b_k = P(B_k)$, et $c_k = P(C_k)$.

Le tableau ci-dessous donne un exemple de choix de formule pour les cinq premiers bons reçus :

	1 ^{er} bon	2 ^e bon	3 ^e bon	4 ^e bon	5 ^e bon
numéro de la formule choisie	n° 2	n° 1	n° 2	n° 1	n° 3

Dans ce cas, B_2 est réalisé, C_1 n'est pas réalisé, mais C_5 l'est.

- 1.(a) Préciser les nombres a_1 , b_1 et c_1 .
On ne demande pas de justification dans cette question.
- (b) Justifier les égalités : $a_2 = \frac{1}{3}$, $b_2 = \frac{2}{3}$, $c_2 = 0$.
- (c) Pour tout entier naturel k non nul, donner les valeurs de $P_{A_k}(A_{k+1})$, $P_{B_k}(A_{k+1})$, $P_{C_k}(A_{k+1})$, $P_{A_k}(B_{k+1})$, $P_{B_k}(B_{k+1})$, $P_{C_k}(B_{k+1})$, $P_{A_k}(C_{k+1})$, $P_{B_k}(C_{k+1})$, $P_{C_k}(C_{k+1})$.
- 2.(a) On considère la matrice M telle que $M = \frac{1}{3}A$, où A est la matrice définie dans la **partie A**.
 En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $n - 1$:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}.$$

- (b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.

- 3.(a) Justifier, pour tout entier naturel n non nul, les égalités : $\begin{cases} a_n = \frac{1}{3^{n-1}} \\ b_n = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} \\ c_n = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} \end{cases}$

- (b) Déterminer les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.
 Ces résultats étaient-ils prévisibles?

- (c) On considère le script Scilab suivant :

```
n = 1
c = 1 - (2^n - 1) / 3^(n-1)
while c < 0.95
    n = n + 1
    c = 1 - (2^n - 1) / 3^(n-1)
end
disp(n)
```

Après exécution, on obtient l'affichage suivant :

11.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

EXERCICE 2

Soit g la fonction numérique réelle définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1.(a) Calculer la limite de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
- (b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variation.
- 3.(a) Démontrer que la courbe (\mathcal{C}) admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.
- (b) Étudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à (D) .
- 4.(a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- (b) Recopier et compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous écrit à l'aide de Scilab afin qu'il affiche un encadrement de α à 10^{-2} près lorsque a et b sont choisis tels que $\alpha \in [a, b]$.

```
function y=g(x)
    y=.....
endfunction
a = input('Entrer la valeur de a : ')
b = input('Entrer la valeur de b : ')
while b - a .....
    m = .....
    if g(a)*g(m) <= 0 then
        b = .....
    else
        .....
    end
end
end
disp(.....)
```

5. Le programme Scilab ci-dessus affiche 0.88 comme résultat.
Dans un même repère orthonormé, placer le réel α sur l'axe des abscisses, tracer la courbe (\mathcal{C}) et la droite (D) .
- 6.(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^2 \left((2x - 1) - g(x) \right) dx = 2 \ln(3) - 3 \ln(2) + \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx,$$

et en déduire que :

$$\int_1^2 \left((2x - 1) - g(x) \right) dx = 3 \ln(3) - 4 \ln(2).$$

(b) Interpréter graphiquement le résultat.

7.(a) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout entier naturel n non nul par :

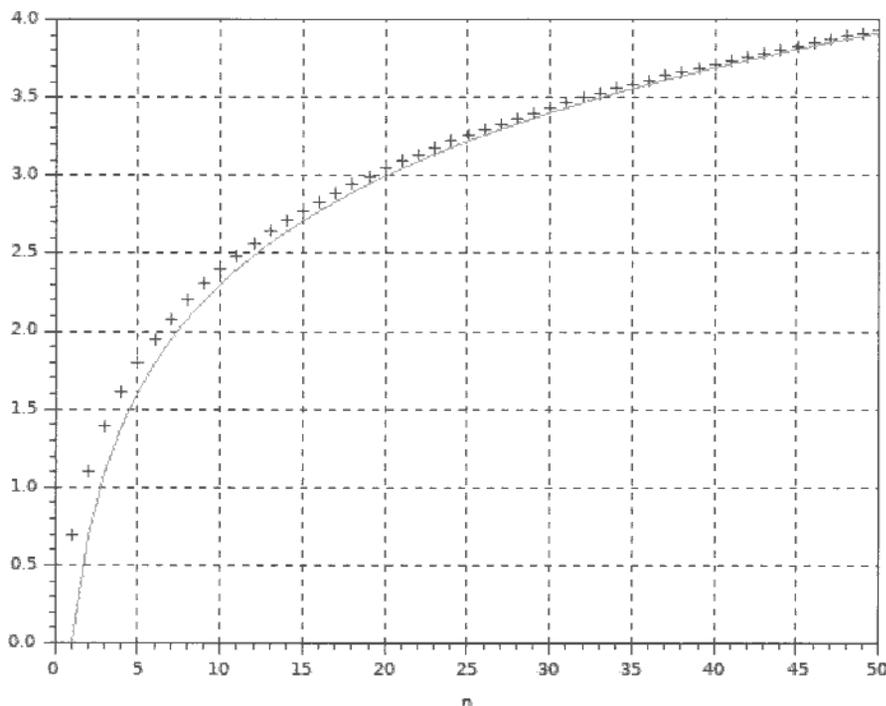
$$u_n = (2n - 1) - g(n).$$

Le script Scilab ci-dessous construit un vecteur ligne u contenant les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

```
u = zeros(1,50)
for n = 1:50
    u(n) = (2*n-1)-g(n)
end
S = cumsum(u)
plot(1:50,S,'+')
```

Dans ce script, g désigne la fonction g dont le code a été complété à la question 4(b).

On exécute le script précédent et on obtient le graphique ci-dessous. Sur ce graphique, on a aussi tracé la courbe représentative de la fonction logarithme népérien \ln en trait plein.



Interpréter le contenu du vecteur ligne S dans le contexte de l'énoncé. En notant pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, que peut-on conjecturer à l'aide du graphique précédent sur la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$?

(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ par un calcul rigoureux.

EXERCICE 3

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ e^{a-x} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

1. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = 2$.

On a donc, pour tout réel x : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ e^{2-x} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

- (a) La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
- (b) La fonction f est-elle dérivable en 2 ?
- (c) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
- (d) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement votre résultat.
- (e) Donner l'allure de \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

On revient à présent et **jusqu'à la fin de l'exercice** au cas général où a est un réel strictement positif.

2.(a) Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et donner sa valeur.

(b) Montrer que f est une densité de probabilité.

3. On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f .

(a) Démontrer que la fonction de répartition de X , notée F_X , est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ 1 - e^{a-x} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

(b) Déterminer la médiane de X , c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle $F_X(x) = \frac{1}{2}$.

(c) Calculer la probabilité $P_{(X \geq a+1)}(X \geq a+2)$.

4. On considère la variable aléatoire $Y = X - a$.

(a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y .

(b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

(c) Donner l'espérance et la variance de Y .

En déduire que $E(X) = 1 + a$ et $V(X) = 1$.

5. Soit n un entier naturel non nul et X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes, et de même loi que X .

On cherche à estimer le réel a à l'aide de la variable aléatoire $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - 1)$.

On admettra que $X_1 - 1, X_2 - 1, \dots, X_n - 1$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

(a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a .

(b) Calculer le risque quadratique de S_n noté $r(S_n)$, et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} r(S_n)$.

(c) On souhaite simuler une réalisation de la variable aléatoire S_n à l'aide de Scilab. L'instruction `grand(1,n,'exp',alpha)` construit un vecteur ligne contenant n coefficients donnant chacun une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\alpha}$.

Recopier et compléter le code ci-dessous pour qu'il fournisse une réalisation de la variable aléatoire S_{50} pour une valeur de a entrée par l'utilisateur.

```
a = .....
Y = grand(1,.....,'exp',.....)
X = Y + a
S = .....
```

