ECRICOME

EXERCICE 1

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ci dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On pose :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de la matrice M, et préciser les valeurs propres associées.

2. En déduire une matrice P telle que $MP = PD$.

3.(a) Vérifier que $X^3 + X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de P.

(b) En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}.

4. Soit X une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1}XP$.

(a) Vérifier que : $Y^2 = P^{-1}X^2P$.

(b) Montrer que X vérifie l'équation

$$(*) \ : \quad X^2 - 4X + I = M$$

si et seulement si Y vérifie

$$(**) \ : \quad Y^2 - 4Y + I = D.$$

5.(a) Déterminer la matrice Y diagonale vérifiant l'équation $(**)$ et dont les coefficients diagonaux sont tous inférieurs à 2.

(b) En déduire une matrice X solution de l'équation $(*)$.
On explicitera les neuf coefficients de la matrice X.

EXERCICE 2

Partie I.

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4\ln(x).$$

1. Étudier le sens de variation de g, et vérifier que g admet un minimum sur $]0, +\infty[$ égal à $2(1-\ln(2))$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0, +\infty[$.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

3. Déterminer la limite de f en 0.
   Interpréter graphiquement le résultat.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
6. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (D).
   On montrera en particulier que (D) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A dont on calculera les coordonnées.
7. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

8.(a) Vérifier que pour tout réel x de $]0, +\infty[$, on a : $f''(x) = \dfrac{2\ln(x)-1}{x^3}$.

(b) Étudier la convexité de f. La courbe $(\mathcal{C})$ possède-t-elle des points d'inflexion ?

9. On donne :

$$\frac{1}{e} \simeq 0{,}4 \qquad \sqrt{e} \simeq 1{,}6 \qquad f(\sqrt{e}) \simeq 1{,}3 \qquad f'(\sqrt{e}) \simeq 0{,}1.$$

   Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D) dans un même repère orthonormé.

Partie II.

1. Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$u(x) = (\ln(x))^2.$$

2. En déduire que $\displaystyle\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2+11}{8}$.
3. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{e^2+11} f(x) & \text{si } x \in [1, e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est une densité de probabilité.
4. Soit X une variable aléatoire admettant h comme densité.

   (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^e \ln(x)dx = 1.$$

   (b) Montrer enfin que X admet une espérance et la déterminer.

EXERCICE 3

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient;
- si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **l'autre** urne;
- si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **la même** urne.

Partie I - Étude de l'urne du n-ième tirage

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U ». Puisque le premier tirage a lieu dans l'urne U, l'événement U_1 est certain : $P(U_1) = 1$.

1. Calculer $P(U_2)$.
2. Donner les valeurs de $P_{U_2}(U_3)$ et de $P_{\overline{U_2}}(U_3)$.
   En déduire $P(U_3)$.

3.(a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, que valent $P_{U_n}(U_{n+1})$ et $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$?

(b) En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n).$$

(c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue α :

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha.$$

(d) Déterminer alors la valeur de $P(U_n)$ en fonction de n.

(e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n)$.

Partie II - Étude du nombre de boules blanches

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.

2.(a) Donner les valeurs de :

$$P_{[X_1=0]}(X_2 = 0), \quad P_{[X_1=0]}(X_2 = 1), \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) \quad \text{et} \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 2).$$

(b) En déduire la loi de X_2.

(c) Vérifier que $E(X_2) = \dfrac{19}{18}$.

3. On rappelle qu'en Scilab, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,k)` renvoie un entier aléatoire compris entre 1 et k. Recopier et compléter les lignes à pointillés du script Scilab ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire X_2 :

```
function X2=simulation()
     tirage1 = grand(1,1,'uin',1,3)
     if tirage1<3 then
          res1=1
          tirage2=grand(1,1,'uin',1,4)
          if tirage2==1 then res2=1
          else res2=0
          end
     else
          res1=0
          tirage2= ........................
          if tirage2<3 then res2= ...............................
          else res2= ...............................
          end
     end
     X2=res1+res2
endfunction
```

4. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, déterminer $X_n(\Omega)$.
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(X_n = 0)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ième boule s'effectuera dans U.

On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ième boule s'effectuera dans V.

6. À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4} \times P(X_n = 1) + \frac{2}{3} \times P(X_n = 0) \qquad (R_1).$$

7. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times P(X_n = 1)$.
Déduire du résultat (R_1), que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

8.(a) Montrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

(b) En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de n.

(c) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 1)$.