ECRICOME

ecric T 2017

EXERCICE 1

Partie I : calcul matriciel

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer PQ.
   En déduire que P est inversible et préciser la matrice P^{-1}.
2. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs propres de M, et préciser à quelles valeurs propres ils sont associés.
3. En déduire une matrice diagonale D (à préciser) telle que $M = \dfrac{1}{6}PDQ$.
4. Établir que pour tout entier naturel n, on a :
$$M^n = \frac{1}{6}PD^nQ.$$
5. Justifier que la première colonne de la matrice M^n est :
$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2(5^n - 2^n) \\ 3(5^n + 2^{n+1}) - 9 \end{pmatrix}.$$

Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied.
Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entraîner au triathlon. Il commence son entraînement par la natation, au jour 0.
Son entraînement obéit ensuite aux règles suivantes (valables pour tout entier naturel n) :

- si l'athlète a pratiqué la natation le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  — la natation avec probabilité $1/5$
  — le cyclisme avec probabilité $1/5$
  — la course à pied avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  — la natation avec probabilité $2/5$
  — le cyclisme avec probabilité $3/5$
- si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  — le cyclisme avec probabilité $1/5$
  — la course à pied avec probabilité $4/5$

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- A_n l'événement « l'athlète s'entraîne à la natation le jour n » et par a_n la probabilité de A_n.
- B_n l'événement « l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour n » et par b_n la probabilité de B_n.
- C_n l'événement « l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour n » et par c_n la probabilité de C_n.

1. Que valent a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1 ?
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n on a :
$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n.$$
Exprimer de même les probabilités b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n et c_n.
3. Déterminer alors la matrice A telle que, pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
et exprimer A en fonction de la matrice M de la partie I.
4. Établir que pour tout entier naturel n:
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
5. En déduire alors l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
6. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

EXERCICE 2

Partie I : tirages dans une urne

Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance de X notée $E(X)$ et vérifier que la variance de X, notée $V(X)$ est égale à 75.
2. On procède cette fois-ci dans $\mathcal{U}$ à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   (a) Quelle est la loi de Y ?
   On précisera $Y(\Omega)$ et $P(Y = k)$ pour tout $k \in Y(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de $E(Y)$ et vérifier que $V(Y) = 12$.
3. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne $\mathcal{U}$ successivement et sans remise les quatre boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
   (a) Quelle est la loi de Z ? On précisera $Z(\Omega)$ et $P(Z = k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.
   (b) Donner les valeurs de $E(Z)$ et de $V(Z)$.

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

L'urne $\mathcal{U}$ contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.
On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

1. Que vaut $T(\Omega)$?
2. Donner la loi de T. On vérifiera que $P(T=1)=\dfrac{7}{16}$.
3. Calculer $E(T)$. La variable aléatoire T suit-elle une loi binomiale ?
4. Sachant que l'événement $[T=1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?
5. On rappelle qu'en langage Scilab l'instruction `grand(1,1,"uin",n1,n2)` renvoie un entier au hasard et uniformément compris entre `n1` et `n2`. Compléter, sur votre copie, le programme Scilab suivant afin qu'il affiche une simulation de la variable aléatoire T.

```
T = .........
if  grand(1,1,"uin",1,2) == 1 then
        for k = 1 : 2
                if grand(1,1,"uin",1,4)<2 then
                        T = T+1
                end
        end
else
        ............
        ............
        ............
        ............
        ............
end
disp(T,"Une simulation de T donne :")
```

EXERCICE 3

Partie I : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{4\ln(x)}{x^3}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Résoudre l'inégalité $f(x)\geqslant 0$ d'inconnue $x>0$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.
4. Étudier les variations de f et préciser les extrema de f.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse 1.

6. Tracer dans un repère orthonormé la tangente à C_f au point d'abscisse 1, ainsi que la courbe C_f. On prendra : $e^{\frac{1}{3}} \simeq 1{,}4$ et $\dfrac{4}{3e} \simeq 0{,}5$.

Partie II : étude d'une variable aléatoire à densité

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel A supérieur ou égal à 1 :

$$\int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3}dx = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Montrer que h est une densité de probabilité.

3. On considère dans la suite de cet exercice une variable aléatoire X dont h est une densité.
   (a) Calculer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
   (b) Compléter sur votre copie les lignes 3 à 5 du programme Scilab suivant pour que la fonction F prenne en entrée un réel x et calcule la valeur de $F(x)$.

```
1  function calcul=F(x)
2          if x < 1 then
3                  ..........
4          else
5                  ..........
6          end
7  endfunction
8
9  for i=1:300, a(i)=-2+7*i/300; b(i)=F(a(i));
10 end
11 plot(a,b)
```

   (c) Qu'obtient-on lors de l'exécution des lignes 9 à 11 du programme précédent ?

4. Montrer que pour tout réel A supérieur ou égal à 1, on a :

$$\int_1^A xh(x)dx = 4 - \frac{4}{A} - \frac{4\ln(A)}{A}.$$

En déduire que X admet une espérance et calculer cette dernière.

5. La variable aléatoire X admet-elle une variance ?
6. Montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1 :

$$P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{1 + 2\ln(2A)}{4 + 8\ln(A)},$$

puis calculer $\lim\limits_{A \to +\infty} \left(P_{[X>A]}(X > 2A)\right)$.