J. 19 1202

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 294

Conception : BSB Burgundy School of Business

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 7 mai 2019, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

2. **Application à l'étude de deux suites**

   On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \text{ et } b_{n+1} = 3b_n + 3^n$$

   a) Quelle instruction faut-il ajouter en ligne 4 dans le programme suivant pour qu'il affiche la valeur de a_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur (on justifiera la réponse) ?

   ```
   1.  n=input(''n?'')
   2.  a=2
   3.  for i=1:n
   4.      ...
   5.  end
   6.  disp(a)
   ```

   i. `a=2*a+3∧n` ii. `a=2*a+3∧(i-1)`
   iii. une autre instruction à préciser.

   Pour tout entier naturel n on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $X_{n+1} = AX_n$.

c) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche la valeur de a_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur.

```
n=input(''n?'')
A=[....]
X=[....]
for i=1:n
    X=...
end
disp(X(1))
```

d) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : $X_n = A^n X_0$.

e) En déduire en utilisant 1. que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $a_n = 2^n + 3^n$ et $b_n = n3^{n-1}$.

3. **Application au calcul des puissances d'une autre matrice**

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

b) Vérifier que $PMP^{-1} = A$.

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $M^n = P^{-1}A^nP$.

En déduire que pour tout entier naturel n on a : $M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$.

4. **Application au calcul d'une somme**

a) Montrer que pour tout entier naturel k on a : $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

b) Pour tout entier naturel n calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(b_{k+1} - b_k) = b_{n+1}$.

d) Déduire des questions précédentes et de 2.e) que pour tout entier naturel n on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f ?

2. a) Montrer que pour pour tout réel x on a : $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

   b) En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

3. a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, la relation : $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

   b) Déterminer le sens de variation de f. Dresser son tableau de variation en y faisant figurer les limites calculées aux questions 1 et 2 ainsi que $f(0)$.

   c) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

4. On admet que pour tout réel x on a : $f''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Étudier la convexité de f.

5. Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.

6. Pour tout réel x, on pose : $h(x) = \ln(1+e^x)$.

   a) Calculer la dérivée de h.

   b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 3

Dans cet exercice on suppose que l'on dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 4 boules rouges tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient deux boules rouges et deux boules blanches.

On commence par lancer une pièce non truquée. Si l'on obtient "pile" on choisit de faire une succession de tirages dans l'urne $\mathcal{U}_1$. Dans le cas contraire on choisit de faire les tirages dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

On note F l'événement « la pièce amène face ». L'événement « la pièce amène pile » est donc $\overline{F}$. On définit également pour tout entier $k \geq 1$ l'événement R_k : « le k-ème tirage dans l'urne choisie amène une boule rouge ».

1. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue un tirage. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{3}{4}$.

2. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on effectue deux tirages *sans remise*. C'est-à-dire que la boule tirée lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne avant de procéder au deuxième tirage dans la même urne.

   a) Calculer $P_F(R_1 \cap R_2)$ et $P_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)$. En déduire que la probabilité que le tirage amène deux boules rouges de suite est $\dfrac{7}{12}$.

   b) On remarque à postériori que les deux boules tirées sont rouges. Quelle est la probabilité que la pièce ait amené pile ?

3. On lance la pièce, on choisit l'urne puis on décide de faire des tirages *sans remise* dans l'urne choisie jusqu'à ce que l'on soit en mesure de déterminer avec certitude dans quelle urne l'on se trouve. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

   a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![1, 4]\!]$.

   b) Expliquer pourquoi $(Y=1) = F \cap B_1$. En déduire $P(Y=1)$.

   c) Calculer de même $P(Y=2)$.

   d) Justifier que $P(Y=4) = \dfrac{1}{2}$. Déduire alors des questions précédentes que $P(Y=3) = \dfrac{1}{12}$.

   e) Calculer $E(Y)$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie par : $\begin{cases} f_n(t) = nt^{n-1} & \text{si } t \in [0,1] \\ f_n(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.

   b) Montrer que f_n est une densité de probabilité.

Tournez la page S.V.P.

2. Soit X_n une variable aléatoire ayant f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

   a) Calculer $F_n(x)$ pour tout réel $x < 0$ et tout réel $x > 1$.

   b) Montrer que pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $F_n(x) = x^n$.

3. Montrer que X_n admet une espérance et que $E(X_n) = \dfrac{n}{n+1}$.

4. **Un exemple.**

   Une cible circulaire de rayon 1 mètre est posée au sol. Deux joueurs 1 et 2 lancent chacun un palet en direction de la cible. On note U_1 et U_2 les variables aléatoires égales aux distances respectives en mètres entre le centre de la cible et les points d'impact des palets des joueurs 1 et 2. On suppose que U_1 et U_2 suivent des lois uniformes sur $[0;1]$ et qu'elles sont indépendantes.

   On note Z la variable aléatoire égale à la plus grande valeur entre U_1 et U_2 et H sa fonction de répartition.

   On rappelle l'expression de la fonction de répartition F d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0;1]$:

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = x & \text{si } x \in [0;1] \\ F(x) = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   a) Justifier que pour tout réel x on a : $P(Z \leq x) = P([U_1 \leq x] \cap [U_2 \leq x])$.

   En déduire, l'expression de $H(x)$ pour tout réel x. Vérifier que Z et X_2 suivent la même loi.

   b) Calculer $P(Z \geq \frac{1}{3})$ et $P(\frac{1}{3} \leq Z \leq \frac{1}{2})$. Vérifier que $P_{(Z \geq \frac{1}{3})}(Z \leq \frac{1}{2}) = \dfrac{5}{32}$.

   c) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche la valeur de Z.

```
U1=grand(1,1,'unf',0,1)
U2=grand(1,1,'unf',0,1)
if U1>=U2 then
     ....
else
     ....
end
disp(Z)
```

5. On revient au cas général où n est un entier naturel non nul quelconque. On pose $Y_n = -\ln(X_n)$. On admet que l'on définit ainsi une variable aléatoire à densité. On note G_n sa fonction de répartition.

   a) Montrer que pour tout réel x on a : $G_n(x) = 1 - F_n(e^{-x})$.

   b) Vérifier que si $x < 0$ alors $e^{-x} > 1$. En déduire $G_n(x)$ lorsque $x < 0$.

   c) En utilisant 2.b) calculer $G_n(x)$ lorsque $x \geq 0$. Reconnaître la loi de Y_n.

   d) Donner $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.