BCE

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 294

Conception : BSB Burgundy School of Business

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Jeudi 4 mai 2017, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^3. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

2. Vérifier que $P^{-1}AP = L$.

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $P^{-1}A^nP = L^n$.
   b) Soit $J = L - I$. Calculer J^2 puis J^3.
   c) En utilisant la formule du binôme, montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a :
   $$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$
   d) En déduire, pour $n \geq 2$, les neuf coefficients de L^n. Vérifier que votre résultat reste vrai lorsque $n = 0$ et lorsque $n = 1$.
   e) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. On considère les trois suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ et $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$:
$$u_{n+1} = u_n \ ;\ v_{n+1} = v_n + 2w_n \ \text{ et } \ w_{n+1} = 2u_n + w_n$$

a) Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$? Donner u_n pour tout entier $n \geq 1$.

b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

c) Etablir pour tout entier $n \geq 1$ que : $X_n = A^{n-1}X_1$.

d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $v_n = 2n(n-1)$ et $w_n = 2n$.

5. On considère le programme suivant qui permet de calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$.

```
1.  A=....
2.  u=zeros(1,10)
3.  v=zeros(1,10)
4.  w=zeros(1,10)
5.  u(1)=1,v(1)=0,w(1)=2
6.  X=[1;0;2]
7.  for i=2:10
8.     X=A*X
9.     u(i)=1
10.    ....
11.    ....
12. end
```

a) Compléter la ligne 1 afin que soit mémorisée dans la variable A la matrice A.

b) Pour mémoriser les termes successifs de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de v_2 à v_{10}, quelle instruction parmi celles-ci faut-il ajouter en ligne 10 ? (On justifiera la réponse).

A. `v(i)=X(i)` B. `v(i)=X` C. `v(i)=X(2)`
D. une autre instruction à préciser

c) Proposer de la même manière une instruction pour la ligne 11 qui permette de mémoriser les premiers termes de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln(x)$ et la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = xe^x - 1$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   b) Calculer la dérivée g' de g sur $[0,+\infty[$. En déduire le tableau des variations de g. On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.

   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$.

   Vérifier que $\alpha \in [0,1]$.

   d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2. a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.
   En déduire le tableau des variations de f sur $]0,+\infty[$.

   c) Justifier que le réel α vérifie $\dfrac{1}{\alpha} = e^\alpha$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.

3. a) Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$: $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2}$

   b) Etudier la convexité de f sur $]0,+\infty[$.

4. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2 cm. On donne $\alpha \simeq 0,57$. et $f(\alpha) \simeq 2,33$.

Exercice 3

Dans un square, un enfant cherche à monter au sommet de la « cage à l'écureuil ». Il s'agit d'une structure métallique que l'enfant doit escalader jusqu'à son sommet.

La cage est constituée de trois niveaux. L'enfant part du premier niveau A. Il cherche ensuite à atteindre le deuxième niveau B et enfin le troisième niveau qui est le sommet C.

On décompose l'ascension de l'enfant en une succession d'instants. On suppose qu'à l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau A puis que la montée se fait selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau A alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au niveau B avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau B alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et il atteint le sommet C avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- si à un instant donné l'enfant est au sommet C alors il y reste définitivement.

On note pour tout entier naturel n, A_n l'événement : « l'enfant se trouve sur le niveau A à l'instant n », B_n l'événement « l'enfant se trouve sur le niveau B à l'instant n ». On note enfin C_n l'événement : « à l'instant n l'enfant est au sommet ». On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces trois événements.

1. Donner les probabilités a_1, b_1 et c_1.
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \; ; \; b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \;\text{ et }\; c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + c_n$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $a_n = \dfrac{1}{3^n}$.
4. Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = 3^n b_n$.
   a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.
   Etablir, pour tout entier naturel n, que : $b_n = \dfrac{2n}{3^n}$.
5. Pour tout entier naturel n, quelle est la valeur de $a_n + b_n + c_n$? En déduire une expression de c_n en fonction de l'entier n.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$. Comment interpréter le résultat ?
6. On note X la variable aléatoire égale à l'instant où l'enfant atteint le sommet.
   a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   b) Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a : $(X = n) = B_{n-1} \cap C_n$.
   c) En déduire, pour $n \geq 2$, que : $P(X = n) = \dfrac{4(n-1)}{3^n}$.
7. a) On note X_1 la variable aléatoire égale à l'instant où pour la première fois l'enfant quitte le niveau A pour arriver sur le niveau B.
   Justifier que X_1 suit une loi usuelle. Donner l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1 et donner $P(X_1 = k)$ pour tout entier k de $X_1(\Omega)$. Calculer $E(X_1)$.
   b) On note X_2 la variable aléatoire égale au nombre d'instants supplémentaires nécessaires à l'enfant pour atteindre pour la première fois le niveau C une fois qu'il a atteint le niveau B. Justifier que X_2 suit la même loi que X_1.

c) Exprimer la variable aléatoire X en fonction de X_1 et de X_2. En déduire que X admet une espérance et que $E(X) = 3$.

Exercice 4

Soit α un réel strictement supérieur à 1. On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = 0 \text{ si } t < 1 \text{ et } f(t) = \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \text{ si } t \geq 1$$

1. a) Soit A un réel supérieur ou égal à 1. On pose $I(A) = \displaystyle\int_1^A \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt$.

   Montrer que $I(A) = 1 - \dfrac{1}{A^\alpha}$.

   b) Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Un apiculteur cherche à estimer la durée de vie de ses bougies à la cire d'abeille, c'est-à-dire le temps en heures qu'elles restent allumées en continu avant de s'éteindre. Dans la suite de l'exercice on considère que la durée de vie d'une bougie prise au hasard est une variable aléatoire X ayant pour densité f.

2. a) Calculer $J(A) = \displaystyle\int_1^A \frac{\alpha}{t^\alpha} dt$ pour tout réel $A \geq 1$.

   b) En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance et vérifier que $E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$.

3. Soit F la fonction de répartition de X. Calculer $F(x)$ pour tout réel $x < 1$. Montrer que pour $x \geq 1$ on a : $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x^\alpha}$.

4. Dans cette question, et seulement cette question, on suppose que $\alpha = 2$. On donnera les réponses sous forme de fractions simplifiées.

   a) On prend une bougie au hasard et on l'allume. Quelle est la probabilité que la bougie reste allumée en continu plus de deux heures ? entre deux et trois heures ?

   b) On remarque que la bougie est encore allumée au bout de deux heures, quelle est la probabilité qu'elle reste allumée encore une heure ?

5. On pose $Y = \ln(X)$. On admet que Y est une variable aléatoire à densité et on note G sa fonction de répartition.

   a) Montrer que pour tout réel x on a : $G(x) = F(e^x)$.

   b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $G(x) = 1 - e^{-\alpha x}$. Calculer de même $G(x)$ pour tout réel $x < 0$.

   c) Reconnaître la loi de Y. En déduire son espérance et sa variance.

6. Le paramètre α de la variable aléatoire X est pour l'instant inconnu. On cherche à l'estimer. Pour cela, on allume n bougies au hasard dans des conditions identiques et indépendantes et on mesure les moments où elles s'éteignent. On note $X_1, X_2, \cdots, X_n$ les durées de vie respectives de chaque bougie. On pose enfin $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n \ln(X_i)$.

   a) Calculer $E(Z_n)$. En déduire que Z_n est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{\alpha}$.

   b) Montrer que $V(Z_n) = \dfrac{1}{n\alpha^2}$. En déduire le risque quadratique de l'estimateur Z_n.

7. On suppose que $n = 100$ et que les valeurs de l'échantillon on été entrées dans une variable Scilab `X=[X(1),X(2),...,X(100)]` (matrice ligne à 100 colonnes). L'instruction `mean(log(X))` amène le résultat $0,33$.

   A combien estimez-vous la valeur de α ? A combien estimez-vous la durée de vie moyenne d'une bougie ?