BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Conception : H.E.C.

OPTION LITTERAIRE

MATHEMATIQUES B/L

Jeudi 2 mai 2013, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

- Les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- On note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.
- Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.

Soit m un entier supérieur ou égal à 2. On considère m voitures $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$ qui participent à une course automobile. Cette course se déroule sur un circuit fermé et consiste en un nombre fini de tours supérieur ou égal à 2.

1. On suppose dans cette question que lors d'un tour d'essai, le temps mis par chacune des voitures $\mathcal{V}_k$ ($k \in [\![1, m]\!]$) pour boucler ce tour est une variable aléatoire T_k.
   On suppose de plus que les variables aléatoires $T_1, \ldots, T_m$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose pour tout entier $m \geqslant 2$: $Z_m = \min(T_1, \ldots, T_m)$.

   a) Déterminer la fonction de répartition F_{Z_m} de Z_m.

   b) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes positives, de densités respectives f_X et f_Y continues sur $\mathbb{R}_+$, et de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y.

   Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_Y(t) f_X(t)\,dt$ est convergente.

On admet alors l'égalité suivante : $P([Y < X]) = \int_0^{+\infty} F_Y(t) f_X(t)\,dt$.

c) En déduire la probabilité que la voiture $\mathcal{V}_1$ réalise le meilleur temps (le plus court) à l'issue de ce tour d'essai. Commenter le résultat.

2. Dans cette question, on s'intéresse uniquement au comportement de la voiture $\mathcal{V}_1$ pendant la course. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n la variable aléatoire définie par :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si la voiture } \mathcal{V}_1 \text{ arrive en tête à l'issue du } n\text{-ième tour} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$.

On suppose que $P([X_1 = 1]) = p$ et que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $P_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+1}{n+1}$.

a) Calculer $P([S_n = 0])$ et $P([S_n = n])$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $P([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{E(S_n)}{n+1}$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, les variables aléatoires $X_2, X_3, \ldots, X_n$ suivent la même loi.

d) Quelle est la probabilité que la voiture $\mathcal{V}_1$ gagne la course ?

e) Établir pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, l'égalité suivante : $P([S_n = k]) = \dfrac{1-p}{n}$.

3. Calculer pour tout entier $n \geqslant 1$, $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

EXERCICE 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, vérifiant $f(0) = 0$ et pour tout x réel, la relation :

$$f'(x) = e^{-xf(x)} \qquad (1)$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Pour tout x réel, on pose : $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = \big(g(x)\big)^2$.

a) On note g' la fonction dérivée de g. Montrer que pour tout x réel, $g'(x)$ est du même signe que $-xg(x)$.

b) Étudier les variations de la fonction h.

c) En déduire que f est une fonction impaire.

2.a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xf(x)}\,dx$ est convergente.

b) À l'aide de la relation (1), en déduire que f possède une limite finie en $+\infty$.

On pose alors : $\lambda = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Préciser les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3.a) Établir pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité suivante : $\int_0^x e^{-tf(t)}dt \geqslant \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt$.

b) En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $f(x) \geqslant \dfrac{1}{\lambda}\big(1 - e^{-\lambda x}\big)$.

c) Montrer que $\lambda \geqslant 1$.

4.a) Soit a un réel strictement positif. Établir pour tout réel $x \in [a, +\infty[$, l'inégalité suivante :

$$f(x) - f(a) \leqslant \int_a^x e^{-tf(a)} dt.$$

b) En déduire que pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a : $f(x) \leqslant f(a) + \dfrac{e^{-af(a)}}{f(a)}$.

c) On suppose que $\lambda > 1$. Établir l'existence d'un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 1$.

d) En déduire que l'on a : $\lambda \leqslant 2$.

5. Soit b un réel strictement positif et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et monotone.

b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

c) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Établir l'encadrement suivant : $\dfrac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda x_n}\right) \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$.

e) Montrer que x_{n+1} est équivalent à x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1.

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, nulles sur $]-\infty, 0]$.

On considère l'application Φ_n qui associe à toute fonction F de $\mathcal{E}$, la fonction $\Phi_n(F) = G_n$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \int_0^1 nt^{n-1}F(xt)\, dt.$$

1. Donner pour tout réel $x \leqslant 0$, la valeur de $G_n(x)$.

2. Montrer que Φ_n est une application linéaire.

3.a) Montrer que Φ_n est une application croissante, c'est-à-dire que si F_1 et F_2 sont deux fonctions de $\mathcal{E}$ telles que $F_1 \geqslant F_2$, alors on a : $\Phi_n(F_1) \geqslant \Phi_n(F_2)$.

b) Montrer que si F est croissante, alors G_n est croissante.

4. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère les fonctions h_k et g_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = \begin{cases} x^k & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad h_k(x) = \begin{cases} x^k \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Soit les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k\, g_k + \sum_{k=1}^n \beta_k\, h_k \qquad \text{et} \qquad H_n = \text{Vect}(g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1, h_2, \ldots, h_n).$$

a) Montrer que S_n appartient à $\mathcal{E}$.

b) On suppose que $\beta_n \neq 0$. Donner un équivalent de $S_n(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$.

c) On suppose que $\beta_n = 0$ et que $\alpha_n \neq 0$. Donner un équivalent de $S_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d) À l'aide d'une démonstration par récurrence, déduire de ce qui précède que $\mathcal{B} = (g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1, h_2, \ldots, h_n)$ est une base de H_n.

5. On note Ψ_n la restriction de Φ_n à H_n.

   a) Calculer $\Psi_n(g_k)$ et $\Psi_n(h_k)$.

   b) En déduire que Ψ_n est un endomorphisme de H_n.

   c) Donner la matrice de Ψ_n dans la base B ainsi que les valeurs propres de Ψ_n.

   d) L'endomorphisme Ψ_n est-il bijectif ?

6. Établir pour tout réel $x > 0$, l'égalité : $G_n(x) = \dfrac{n}{x^n}\displaystyle\int_0^x u^{n-1}F(u)\,du$.

7.a) Soit ε un réel strictement positif. En utilisant la continuité de F en 0, montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que si $|x| \leqslant \alpha$, alors $|G_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

   b) En déduire que Φ_n est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

   c) Montrer que l'endomorphisme Φ_n est injectif.

8.a) Montrer que G_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

   On note G'_n la fonction dérivée de G_n. Exprimer pour tout $x > 0$, $G'_n(x)$ en fonction de $F(x)$ et $G_n(x)$.

   b) Montrer que l'endomorphisme Φ_n n'est pas surjectif.

9. On suppose l'existence de la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. On pose : $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

   a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} G_n(x) = \ell$.

   b) On suppose que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, de densité f nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Montrer que $G_n = \Phi_n(F)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.