PROBLEME 1

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie I : Préliminaires

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$. On notera α et β les deux racines de cette équation.

2. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit M une matrice carrée d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Soit λ une valeur propre de M. Montrer que s'il existe trois éléments a, b, c de $\mathbb{K}$ tels que

$$aM^2 + bM + cI_p = 0$$

où I_p désigne la matrice de l'identité de $\mathbb{K}^p$,
alors λ vérifie $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Partie II

On note E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{2n}$ où n est un entier naturel non nul.
On note $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n, e'_1, ..., e'_n)$ la base canonique de E.
Soit φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \begin{cases} \varphi(e_k) = e_k - e'_k \\ \varphi(e'_k) = e_k + e'_k \end{cases}$$

On appelle A_{2n} la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
A_{2n} est donc une matrice carrée d'ordre $2n$.

1. *Dans cette question et cette question seulement, on suppose* $n = 1$.
Ecrire A_2. A_2 est-elle diagonalisable si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

2. Calculer A_{2n}^2 et montrer que $A_{2n}^2 = 2A_{2n} - 2I_{2n}$ où I_{2n} est la matrice de l'application identique Id_E de E.

3. Que peut-on dire des valeurs propres de A_{2n} ?
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A_{2n} est-elle diagonalisable ?

Dorénavant, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4. Justifier que $\varphi \circ \varphi = 2\varphi - 2Id_E$.
Montrer que

$$\mathrm{Ker}(\varphi - \alpha Id_E) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(\varphi - \beta Id_E)$$

sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
En déduire que A_{2n} est diagonalisable.

5. Déterminer une base de vecteurs propres de A_{2n}.

(On pourra noter $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$)

PROBLEME 2

Notations :

Pour k et n entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on notera indifféremment $\mathrm{C}_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ le coefficient binomial : $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Dans ce problème, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé et les variables aléatoires utilisées sont définies sur cet espace probabilisé.

Résultats admis :

(1) Formule de Stirling : $n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ quand n tend vers $+\infty$

(2) Equivalent des sommes partielles pour des séries divergentes :
Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites positives. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et si la série de terme général b_n diverge, alors la série de terme général a_n diverge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} b_k$

Partie I : Préliminaires

Dans tout le problème, on note pour tout entier naturel n,

$$u_n = \mathrm{C}_{2n}^n = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$$

1. En utilisant la formule de Stirling, déterminer un réel C strictement positif tel que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C\frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

2. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant 2^{2n}$$

Partie II : Déplacement aléatoire d'une puce

Une puce se déplace sur un axe gradué. Elle part de la position 0 et à chaque instant i entier naturel non nul, elle se déplace d'un pas de longueur 1 au hasard vers la droite ou vers la gauche. On définit la variable aléatoire X_i pour tout i entier naturel non nul, par

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si elle se déplace vers la droite} \\ X_i = -1 & \text{si elle se déplace vers la gauche} \end{cases}$$

Ainsi $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires de même loi donnée pour tout entier naturel i non nul par

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

Dans cette partie, on suppose que les X_i sont indépendantes.
Pour tout entier naturel n, on note S_n la variable aléatoire représentant la position de la puce au bout de n déplacements. On aura alors $S_0 = 0$ et pour tout entier naturel n strictement positif

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

1. Donner la loi de S_1 et son espérance $\mathrm{E}(S_1)$.
Donner la loi de S_2 et son espérance $\mathrm{E}(S_2)$.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{S_{2n} + 2n}{2} = \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{X_i + 1}{2} \right)$$

et donner la loi de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{X_i + 1}{2} \right)$.

3. En déduire que pour tout entier n strictement positif,

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} u_n$$

Dorénavant, pour tout entier naturel i non nul, on considère la variable aléatoire Z_i définie par

$$\begin{cases} Z_i = 1 & \text{si} \quad S_{2i} = 0 \\ Z_i = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis on souhaite étudier le comportement, lorsque n tend vers $+\infty$, de l'espérance $E(Y_n)$ de la variable aléatoire

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

4. Que représente pour la puce la valeur de la variable aléatoire Y_n ?

5. En utilisant le résultat admis (2), montrer que

$$\mathrm{E}(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

En utilisant une méthode de comparaison entre série et intégrale, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

En déduire un équivalent de $\mathrm{E}(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie III : Autre méthode de déplacement d'une puce

$\boxed{\text{A}}$ Résultats d'analyse

1. Montrer que, pour tout x élément de l'intervalle $[0,\ 1[$ et tout entier naturel n ,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{4^k} x^k + (n+1) \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \frac{u_{n+1}}{4^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{3/2}}$$

On pourra raisonner par récurrence sur n.

2. Montrer que, si t et x sont des réels $0 \leqslant t \leqslant x < 1$, alors

$$0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$$

3. En utilisant les préliminaires, montrer que, pour tout x élément de l'intervalle $[0,\ 1[$,

$$0 \leqslant (n+1) \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \frac{u_{n+1}}{4^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{3/2}} \leqslant (n+1) x^n \int_0^x (1-t)^{-3/2} \, \mathrm{d}t$$

En déduire que, pour tout x élément de l'intervalle $[0,\ 1[$,

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1) \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \frac{u_{n+1}}{4^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{3/2}} = 0$$

4. Déduire de ce qui précède que, pour tout x élément de l'intervalle $\left[0,\ \frac{1}{4}\right[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k \qquad (R_1)$$

On pose, pour tout entier naturel n,

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$$

5. Pour tout entier naturel n, on définit les sous-ensembles K_n et L_n de $\mathbb{N}^2$ par
$K_n = \{(j,k) \in \mathbb{N}^2 / 0 \leqslant j \leqslant n \quad \text{et} \quad 0 \leqslant k \leqslant n\}$ et $L_n = \{(j,k) \in \mathbb{N}^2 / j+k \leqslant n\}$
Montrer que

$$L_n \subset K_n \subset L_{2n}$$

6. Soit x élément de l'intervalle $\left[0,\ \frac{1}{4}\right[$. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\sum_{i=0}^{n} v_i x^i \leqslant \left(\sum_{j=0}^{n} u_j x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} u_k x^k\right) \leqslant \sum_{i=0}^{2n} v_i x^i$$

7. Déduire de ce qui précède que, pour tout x élément de l'intervalle $\left[0,\ \frac{1}{4}\right[$, la série de terme général $v_n x^n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n = \frac{1}{1-4x} \qquad (R2)$$

B Application au déplacement aléatoire de la puce

Soit N un entier naturel fixé non nul. On extrait au hasard une partie A de cardinal N de l'ensemble $\{1, 2, ..., 2N\}$. Pour tout i élément de $\{1, 2, ..., 2N\}$, on considère la variable aléatoire X'_i définie par

$$\begin{cases} X'_i = \ \ 1 & \text{si} \quad i \in A \\ X'_i = -1 & \text{si} \quad i \notin A \end{cases}$$

On note $S'_0 = 0$ et pour tout i élément de $\{1, 2, ..., 2N\}$,

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} X'_i$$

On peut considérer à nouveau pour tout entier naturel n, S'_n comme la position d'une puce au bout de n déplacements dictés par la partie A tirée au sort.

1. On considère, *dans cette question seulement*, que $N = 3$. On suppose que l'on a tiré au sort la partie $A = \{1, 2, 5\}$.
Donner, pour tout i élément de $\{1, ..., 6\}$, les valeurs de X'_i et de S'_i .

2. Que vaut S'_{2N} ?

3. Montrer que, pour tout i élément de $\{1, 2, ..., 2N\}$,

$$\mathbf{P}(X'_i = 1) = \mathbf{P}(X'_i = -1) = \frac{1}{2}$$

4. On suppose que les variables $(X'_i)_{i \in \{1,2,...,2N\}}$ sont mutuellement indépendantes.
Calculer la variance $\mathrm{V}(S'_{2N})$ de S'_{2N}.
Trouver une contradiction et conclure.

Dorénavant, pour tout i élément de $\{1, 2, ..., N\}$, on considère la variable aléatoire Z_i' définie par

$$\begin{cases} Z_i' = 1 & \text{si} \quad S_{2i}' = 0 \\ Z_i' = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis on souhaite étudier le comportement, lorsque n tend vers $+\infty$, de l'espérance $E(Y_n')$ de la variable aléatoire

$$Y_n' = \sum_{i=1}^{n} Z_i'$$

5. Montrer que

$$\mathrm{E}(Y_N') = \frac{v_N}{u_N}$$

où v_N est défini au III.A.

6. A l'aide du cours sur les séries, écrire $\dfrac{1}{1-4x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k x^k$ pour tout $x \in \left[0,\ \dfrac{1}{4}\right[$.

7. On admettra que $(R2)$ implique $v_N = \varepsilon_N$.
En déduire un équivalent de $\mathrm{E}(Y_N')$ lorsque N tend vers $+\infty$.