**Code sujet : 284**

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Conception : ESSEC – HEC Paris**

---

**MATHÉMATIQUES B/L**

**FILIÈRE LITTÉRAIRE**

**Programme ENS B/L**

Vendredi 26 avril 2024, de 8 h. à 12 h.

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---

## EXERCICE 1.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$. On rappelle que $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $b^x = \mathrm{e}^{x\ln(b)}$.

### Partie A.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f$ la fonction définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} a5^{-x} & \text{si } x > 0 \\ a5^{x} & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On suppose que $f$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire $X$ définie sur $\Omega$.

1. Déterminer la valeur du réel $a$.
2. Déterminer la fonction de répartition de $X$.
3. Montrer que $X^2$ admet une espérance et la calculer.

## Partie B.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g$ la fonction définie par

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\lambda}{(2+x)^2} & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On suppose que $g$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire $Z$ définie sur $\Omega$.

1. Déterminer la valeur de $\lambda$.
2. Déterminer la fonction de répartition de $Z$.
3. On suppose que $Z(\Omega) = ]0,1]$ et on pose $Y = Z + \dfrac{1}{Z}$. On admet que $Y$ est une variable aléatoire définie sur $\Omega$. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par $Y$.
4. Déterminer la fonction de répartition de $Y$.
5. La variable aléatoire $Y$ est-elle à densité ? Si oui, donner une densité de $Y$.

## EXERCICE 2.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx)(\cos x)^n dx.$$

Le but de cet exercice est l'étude de la nature de la série de terme général $u_n$ et le calcul de sa somme.

## Partie A.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
   (b) En déduire la valeur de $u_1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1-(1-t)^n}{t} & \text{si} \quad t \in \mathbb{R}^* \\ n & \text{si} \quad t = 0 \end{array} \right.$$

   (a) Tracer le graphe de la fonction $f_2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
   (b) Tracer le graphe de la fonction $f_3$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
   (c) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n$ est-elle dérivable en $0$ ? Si oui, donner $f_n'(0)$.
   (e) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} t^{k-1}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)dt.$$

   (a) Calculer $I_1$, $I_2$ et $I_3$.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{k-1} dt$.

(d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(e) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

4. (a) Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2px) dx = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}.$$

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(2px) = 2^n \sin(nx)(\cos x)^n.$$

(c) Conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} I_n.$$

### Partie B.

5. Soit $x \in [0,1[$. Soit $\varphi_x$ la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{1\}, \qquad \varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t}.$$

(a) Dresser le tableau de variations de $\varphi_x$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$ en précisant les limites aux bornes.

(b) Montrer que :

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \forall t \in [0,x], \qquad 0 \leqslant \varphi_x(t) \leqslant x.$$

(c) Trouver un réel $a$ tel que

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \forall t \in [0,x], \qquad \frac{\varphi_x(t)}{1-t} = \frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{a}{1-t}.$$

6. Soit $h$ la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$h(x) = -\ln(1-x).$$

(a) Dresser le tableau de variations de $h$ sur $[0,1[$ en précisant les limites aux bornes.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1[, \quad h(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + R_n(x) \quad \text{avec} \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(\varphi_x(t))^n}{1-t} dt.$$

(c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1[, \qquad 0 \leqslant R_n(x) \leqslant -x^n \ln(1-x).$$

(d) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, la série de terme général $\dfrac{x^k}{k}$ converge.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall x \in [0,1[, \qquad (1-x)\sum_{k=1}^{n} I_k x^k = h(x) - R_n(x) - I_n x^{n+1}.$$

(b) Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$, la série de terme géneral $I_k x^k$ converge et que

$$\forall x \in [0,1[, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} I_k x^k = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

(c) En déduire la convergence de la série de terme général $u_k$ et calculer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

## EXERCICE 3.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$.
Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que $X$ est stochastiquement inférieure à $Y$ et l'on note $X \leqslant_{st} Y$ si l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(Y \geqslant t).$$

### Partie I.

Soit $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, une fonction croissante et bornée.

1. La fonction $h$ admet-elle une limite finie en $+\infty$ ? Justifier.
2. Montrer que $h(X)$ et $h(Y)$ admettent des espérances que l'on notera $\mathbb{E}(h(X))$ et $\mathbb{E}(h(Y))$.
3. Montrer que la série de terme général $(h(n) - h(n-1))$ converge.
4. Montrer que la série de terme général $(h(n) - h(n-1))\,\mathbb{P}(X \geqslant n)$ converge.
5. Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(X \geqslant N+1) = 0.$$

6. Etablir la relation suivante :

$$\mathbb{E}(h(X)) = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (h(n) - h(n-1))\,\mathbb{P}(X \geqslant n).$$

7. En déduire que si $X \leqslant_{st} Y$, alors $\mathbb{E}(h(X)) \leqslant \mathbb{E}(h(Y))$.

### Partie II.

On souhaite montrer la réciproque.
On suppose que pour toute fonction $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ croissante et bornée, on a $\mathbb{E}(h(X)) \leqslant \mathbb{E}(h(Y))$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $h_n$ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad h_n(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < n \\ 1 & \text{si } i \geqslant n \end{cases}$$

   Montrer que la fonction $h_n$ est croissante et bornée.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \mathbb{P}(Y \geqslant n)$.
3. Montrer que $X$ est stochastiquement inférieure à $Y$.
4. Enoncer le théorème que vous venez de démontrer.

**Partie III.**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, telles que $X \leqslant_{st} Y$.
Soit $Z$ une variable aléatoire indépendante de $X$ et de même loi que $X$.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y \geqslant k).$$

2. En déduire que
$$\mathbb{P}(X \leqslant Y) \geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Z \geqslant k).$$

3. Montrer que
$$\mathbb{P}(Z \geqslant X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Z \geqslant k).$$

4. Montrer que
$$\mathbb{P}(Z = X) > 0.$$

5. En déduire que
$$\mathbb{P}(Z \geqslant X) > \frac{1}{2}.$$

6. Montrer que
$$\mathbb{P}(X \leqslant Y) > \frac{1}{2}.$$

## EXERCICE 4

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on note

$$A(\lambda) = A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \iddots & 0 & \lambda_n \\ 0 & \iddots & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & \iddots & \iddots & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si l'on note $a_{i,j}$ le coefficient de $A(\lambda)$ situé à la ligne $i$ et la colonne $j$,

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad a_{i,j} = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } i = n+1-j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note
$$\mathcal{E}_n = \{A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ainsi, $\mathcal{E}_n$ est l'ensemble des matrices de la forme $A(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ lorsque $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ décrit $\mathbb{R}^n$.

1. L'ensemble $\mathcal{E}_n$ est-il un $\mathbb{R}-$espace vectoriel ? Si oui, en donner une base.
2. On considère, dans cette question seulement, le cas $n = 2$.
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de la matrice $A(1, 1)$.
   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de la matrice $A(1, -1)$.
   (c) Toutes les matrices de $\mathcal{E}_2$ sont-elles inversibles ? Justifier la réponse.

(d) Toutes les matrices de $\mathcal{E}_2$ sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$ ? Justifier la réponse.

(e) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Discuter du nombre de valeurs propres réelles de la matrice $A(\lambda_1, \lambda_2)$ en fonction du signe du produit $\lambda_1\lambda_2$.

(f) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda$ pour que la matrice $A(0, \lambda)$ soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(g) Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$ et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$.
On pose
$$\forall \omega \in \Omega, \qquad A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & X(\omega) \\ Y(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculer la probabilité de l'événement
$$\{\omega \in \Omega,\ A(\omega) \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}\}.$$

(h) Soit $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de Poisson de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$.
On pose
$$\forall \omega \in \Omega, \qquad A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & X(\omega) \\ Y(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculer la probabilité de l'événement
$$\{\omega \in \Omega,\ A(\omega) \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}\}.$$

3. On considère, dans cette question seulement, le cas $n = 3$.

(a) La matrice $A(1,1,1)$ est-elle inversible ? Justifier.

(b) Montrer que 1 et $-1$ sont valeurs propres de la matrice $A(1,1,1)$.

(c) Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de la matrice $A(1,1,1)$.

(d) Déterminer une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $A(1,1,1)$.

(e) Donner un exemple de matrice de $\mathcal{E}_3$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et un exemple de matrice de $\mathcal{E}_3$ non diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Justifier chaque réponse.

4. On revient désormais au cas général avec une valeur quelconque de l'entier $n \geqslant 2$.

(a) Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le produit $A(\lambda)A(\mu)$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ pour que $A(\lambda)$ soit inversible. Dans ce cas, donner l'inverse de $A(\lambda)$.

5. Dans toute la suite, $n$ est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f_\lambda$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est $A(\lambda)$.
Soit $F$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On dit que $F$ est stable par $f_\lambda$ si
$$\forall x \in F, \qquad f_\lambda(x) \in F.$$

(a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $F_k = \mathrm{Vect}(e_k, e_{n+1-k})$.
Montrer que $F_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par $f_\lambda$.
Préciser la dimension de $F_k$.

(b) Construire une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de $f_\lambda$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} A(\lambda_1, \lambda_n) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & A(\lambda_2, \lambda_{n-1}) & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A(\lambda_{n/2}, \lambda_{n/2+1}) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A(\lambda_1, \lambda_n) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & A(\lambda_2, \lambda_{n-1}) & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & A(\lambda_{\frac{n-1}{2}}, \lambda_{\frac{n+3}{2}}) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{\frac{n+1}{2}} \end{pmatrix}$$
si $n$ pair $\qquad$ si $n$ impair

(c) Déterminer les valeurs propres réelles de la matrice $A(1, 2, 3, \ldots, n)$.
La matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ?