BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Concepteur : ESSEC

OPTION LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

Filière B/L

MATHEMATIQUES

Lundi 6 mai de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
On s'intéresse dans ce problème à des exemples de transformations du type $\Phi : f \mapsto \Phi(f)$ où f est une fonction de E et $\Phi(f)$ est la fonction définie par :

$$\Phi(f)(x) = \int_a^b \varphi(x-t)f(t)\,dt$$

avec a et b dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et φ est une fonction de E donnée.
Par commodité d'écriture, on notera aussi $\Phi(f) = F$.
La première partie recherche les fonctions propres d'une telle transformation et la seconde partie étudie une propriété de la somme de deux lois de Cauchy indépendantes.

Partie I - Recherche de fonctions propres

Dans cette partie, on pose, pour f dans E, $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x-t)^2 f(t)\,dt$ et on désigne par Φ, l'application qui à f dans E associe $F = \Phi(f)$.

On note, pour k entier naturel, f_k la fonction de E définie par $f_k(t) = t^k$.

1) En développant $(x-t)^2$ dans $\int_{-1}^{1}(x-t)^2 f(t)\,dt$, justifier que si f est dans E, alors $F = \Phi(f)$ est dans E.

2) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

3) Exprimer $\Phi(f_0)$, $\Phi(f_1)$ et $\Phi(f_2)$ à l'aide des fonctions f_0, f_1 et f_2.

4) Justifier que les fonctions f_0, f_1 et f_2 forment une famille libre de E.

5) Soit f une fonction propre de Φ associée à une valeur propre réelle λ non nulle, c'est-à-dire une fonction f non nulle telle que $F = \Phi(f) = \lambda f$.

Montrer que f est de la forme $af_0 + bf_1 + cf_2$ et en déduire les valeurs propres non nulles de Φ ainsi que les fonctions propres associées.

6) Montrer que les fonctions propres de Φ associées à la valeur propre 0, c'est-à-dire les éléments du noyau de Φ, sont exactement les fonctions f non nulles telles que :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} t f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,dt = 0$$

Donner un exemple d'une telle fonction propre.

Partie II - Somme de lois de Cauchy indépendantes

Dans cette partie, on désigne par $\mathscr{E} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, un espace probabilisé.
Les variables aléatoires sont définies sur $\mathscr{E}$.
Une variable aléatoire à densité est aussi appelée variable aléatoire absolument continue.

Pour a réel strictement positif, on pose $\varphi_a(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$.

7) Justifier que φ_a est une densité d'une variable aléatoire absolument continue.
On dit qu'une variable aléatoire réelle définie sur $\mathscr{E}$ suit une loi de Cauchy de paramètre a si elle admet comme densité la fonction φ_a.

8) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre a. Déterminer la loi de λX pour λ réel strictement positif.

9) Montrer qu'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre a n'admet pas d'espérance finie.

Dans la suite de ce problème, on considère deux variables aléatoires X_a et X_b sur $\mathscr{E}$ suivant des lois de Cauchy de paramètres respectifs a et b. On suppose que ces lois sont indépendantes et on admet que $X_a + X_b$ est une variable aléatoire absolument continue dont une densité est la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(t)\varphi_b(x-t)\,dt$$

On se propose de caractériser la loi de $X_a + X_b$.

10) Soient x un réel et A un réel strictement positif. Calculer $\displaystyle\int_{-A}^{A} \frac{t}{t^2+a^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_{-A}^{A} \frac{x-t}{(x-t)^2+b^2}\,dt$ ainsi que les limites de ces intégrales lorsque A tend vers $+\infty$.

11) Pour x et t réels, on admet que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{(t^2+a^2)((x-t)^2+b^2)} = \frac{\alpha t+\beta}{t^2+a^2} + \frac{\gamma(x-t)+\delta}{(x-t)^2+b^2}$$

avec $\boxed{\beta = \dfrac{x^2+b^2-a^2}{(x^2+(a+b)^2)(x^2+(a-b)^2)}}$ et $\boxed{\delta = \dfrac{x^2+a^2-b^2}{(x^2+(a+b)^2)(x^2+(a-b)^2)}}$.

Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(t)\varphi_b(x-t)\,dt$ et en déduire la loi de X_a+X_b.

PROBLÈME 2

On désigne par $\mathscr{E} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Les variables aléatoires utilisées dans ce problème sont toutes définies sur $\mathscr{E}$.
On rappelle que si X est une variable aléatoire suivant une loi normale et si a et b sont des réels avec $a > 0$, alors $aX+b$ suit une loi normale.

Partie I - Lois infiniment divisibles

Une variable aléatoire définie sur $\mathscr{E}$ est dite **infiniment divisible** si pour tout entier supérieur ou égal à 1, il existe des variables aléatoires $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$ indépendantes et de même loi, telles que $\boxed{X \text{ suive la même loi que } X_{1,n}+X_{2,n}+\cdots+X_{n,n} = \sum_{k=1}^{n} X_{k,n}}$.

12) On rappelle que si n est un entier supérieur ou égal à 2 et si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (notée $\mathscr{P}(\lambda)$), alors la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi de Poisson.
Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?

13) En déduire qu'une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson est infiniment divisible.

14) On rappelle que si n est un entier supérieur ou égal à 2 et si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 (notée $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ l'espérance de la variable et σ^2 sa variance), alors la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi normale.
Quels sont les paramètres de cette loi normale ?

15) En déduire qu'une variable aléatoire X suivant une loi normale est infiniment divisible.

Dans la suite de cette partie, on désigne par X une variable aléatoire réelle pour laquelle il existe un réel a strictement positif tel que $\mathbb{P}(-a \le X \le a) = 1$.
On admettra que X admet une espérance et une variance finies.

16) En remarquant que $V(X) \le E(X^2)$, montrer que $V(X) \le a^2$.

On suppose maintenant que X est infiniment divisible et suit, pour n entier non nul, la même loi que $\sum_{k=1}^{n} X_{k,n}$ comme dans la définition donnée en introduction de cette partie.

17) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_{1,n} < -\frac{a}{n}) = 0$.

18) En déduire que $V(X) \leq \frac{a^2}{n}$ puis que $V(X) = 0$.

19) Donner deux exemples de variables aléatoires réelles, l'une discrète, l'autre absolument continue, qui ne sont pas infiniment divisibles.

Partie II - Lois stables

Une variable aléatoire définie sur $\mathscr{E}$ est dite **stable** si pour tout entier supérieur ou égal à 1, et toutes variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivant la même loi que X, il existe des réels a_n (avec $a_n > 0$) et b_n tels que $\boxed{\sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \text{ suive la même loi que } a_n X + b_n}$.

20) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$; soient Y et Z indépendantes suivant la même loi que X. On suppose qu'il existe a et b réels avec $a > 0$ tels que $Y + Z$ suive la même loi que $aX + b$.
Montrer que $\begin{cases} 2\lambda = a\lambda + b \\ 2\lambda = a^2\lambda \end{cases}$ et en déduire une contradiction.

21) Que conclure en ce qui concerne les lois infiniment divisibles et les lois stables ?

22) Montrer que toute loi stable est infiniment divisible.

23) Montrer qu'une variable aléatoire réelle suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est stable.

24) Montrer qu'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy (voir premier problème) est à la fois stable et infiniment divisible.

Jusqu'à la fin de cette partie, on s'intéresse à une variable aléatoire X stable de variance finie $V(X) = \sigma^2$ non nulle. Pour n entier naturel non nul, on note $a_n > 0$ et b_n des réels tels que $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suive la même loi que $a_n X + b_n$ et où les variables aléatoires X_k sont indépendantes et suivent la même loi que X.

25) Calculer a_n et b_n en fonction de n et de l'espérance $E(X) = \mu$ de X.

26) En utilisant le théorème de la limite centrée, montrer que X suit une loi normale.

27) Le résultat de la question 24 vous semble-t-il contradictoire ?