BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2012

Concepteur : ESSEC

OPTION LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

Filière B/L

MATHEMATIQUES

Lundi 7 mai de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

On note :
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels (quotients de deux entiers à dénominateur non nul)
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels

Dans ce problème, on désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Un élément u de E pourra aussi être noté $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n).
Pour p entier naturel, on pose $F_p = \{u \in E,\ \forall n \geq p, u_n = 0\}$ et $F = \{u \in E,\ \exists p \in \mathbb{N}; u \in F_p\} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p$.

Le but de ce problème est d'étudier l'éventuelle appartenance à F de certains éléments de E.

Partie I - Résultat préliminaire

1) Montrer que pour tout p de $\mathbb{N}$, F_p est un sous-espace vectoriel de E.
2) Soit p dans $\mathbb{N}$; en considérant l'application θ de F_p dans $\mathbb{R}^p$ tel que :

$$\forall u \in F_p, \quad \theta(u) = (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$$

déterminer la dimension de F_p.

3) L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? (on justifiera la réponse).

Partie II - Suites récurrentes appartenant à F

Dans cette partie f désigne une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On s'intéresse aux suites u de E définies par :

$$\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

II.A - Conditions nécessaires

Dans cette section seulement, on suppose qu'il existe p dans $\mathbb{N}$ avec $p \geq 2$ tel que $u \in F_p$ avec $u \notin F_{p-1}$.
Montrer successivement, en utilisant des termes adéquats de la suite u, que :

4) $f(0) = 0$.

5) Il existe $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.

6) Il existe $\beta > 0$ tel que $f(\beta) = \alpha$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que f vérifie les hypothèses (H) suivantes :

$f(0) = 0$, $f(1) = 0$, il existe β dans $]0,1[$ avec $f(\beta) = 1$ tel que f est strictement croissante sur $[0,\beta]$ et strictement décroissante sur $[\beta, 1]$.

7) Montrer que l'application φ définie sur $[0,\beta]$ par $\varphi(x) = f(x)$ réalise une bijection de $[0,\beta]$ dans $[0,1]$.
On notera ψ la réciproque de φ.

8) Soit p un entier supérieur ou égal à 2 ; on pose $u_0 = \psi^{p-1}(1)$ (on applique ψ successivement $p-1$ fois à partir de 1).
Montrer que u est dans F_p.

II.B - Étude d'un exemple

On garde les notations de la section précédente. Dans cette section, f désigne l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ et nulle sur $[1,+\infty[$.

9) Montrer que f vérifie les hypothèses (H) ; on donnera en particulier β et on vérifiera que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \psi(x) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}$$

10) On suppose $u_0 = \sin(a)$ avec $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Exprimer, pour n dans $\mathbb{N}$, u_n sous la forme $|\sin(\lambda_n a)|$ où λ_n est à déterminer.

11) Pour quelles valeurs de a la suite u est-elle dans F ?

12) Exprimer $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$ à l'aide de radicaux.

Partie III - Un exemple d'irrationalité

Dans toute la suite de ce problème, a désigne un élément de $\mathbb{Q}$ strictement positif. On suppose que $\exp(a)$ est rationnel, donc de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers de $\mathbb{N}^*$.

On pose pour n dans $\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{a^{2n+1}}{n!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{ta}\, dt$$

13) Calculer u_0 et montrer que $u_1 = (2a-2)e^a + (2a+2)e^{-a}$.

14) À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = -(4n+6)u_{n+1} + 4a^2 u_n$$

15) Justifier que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{2a^{2n+1}}{n!} e^a$.

16) Prouver qu'il existe λ dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout n de $\mathbb{N}$, $pq\lambda^n u_n \in \mathbb{N}$.

17) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n u_n = 0$ et en déduire que $u \in F$.

18) Conclure que $\exp(a)$ n'est pas rationnel.

PROBLÈME 2

Dans ce problème, un graphe est un couple (S,A) où S est un ensemble fini non vide d'entiers appelés *sommets* du graphe et A un ensemble (éventuellement vide) de paires $\{s,s'\}$ de sommets distincts de S appelées *arêtes*.

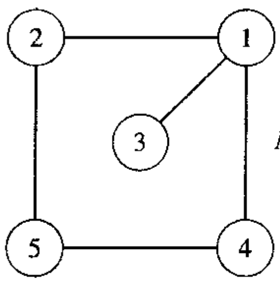
Si $G = (S,A)$ et si $G' = (S',A')$ avec $S' \subset S$ et $A' \subset A$, le graphe G' est appelé *sous-graphe* de G ; on dit aussi que G' *appartient* à G.

Un *k-cycle* (avec $k \geq 3$) est un graphe (ou sous-graphe d'un graphe) (S,A) avec S de cardinal k tel qu'en notant $S = \{s_1,s_2,\dots,s_k\}$, A est de la forme $\{\{s_1,s_2\},\{s_2,s_3\},\dots,\{s_{k-1},s_k\},\{s_k,s_1\}\}$.

Si $G = (S,A)$ est un graphe avec $S = \{s_1,s_2,\dots,s_n\}$, la *matrice d'adjacence* de G est la matrice réelle $M_G = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de taille n telle que :

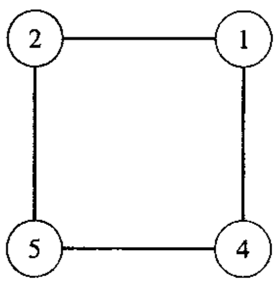
$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{s_i,s_j\} \in A \\ 0 & \text{si } \{s_i,s_j\} \notin A \end{cases}$$

Exemple :
voici le graphe $G_0 = (S,A)$ avec $S = \{1,2,3,4,5\} = [\![1,5]\!]$ et $A = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,5\},\{4,5\}\}$, la matrice d'adjacence de G_0 et un sous-graphe G'_0 de G_0 qui est un 4-cycle :



Graphe G_0

$$M_{G_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Graphe G'_0

Partie I - Spectre de la matrice d'adjacence d'un cycle

Dans cette partie $G = (S,A)$ est un n-cycle avec $n \geq 3$ fixé tel que :

$$S = \{1,2,\dots,n\} = [\![1,n]\!] \text{ et } A = \{\{1,2\},\{2,3\},\dots,\{n-1,n\},\{n,1\}\}$$

On note ω le nombre complexe $\exp(\frac{2i\pi}{n}) = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$.

19) Justifier que la matrice d'adjacence de G est $M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

20) Montrer que pour $k \in [\![1,n]\!]$, le vecteur colonne $C_k = \begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{nk} \end{pmatrix}$ est vecteur propre complexe de M_G associé à une valeur propre réelle λ_k que l'on déterminera.
21) En discutant selon la parité de n, étudier les espaces propres réels de M_G associés aux différentes valeurs propres λ_k.

Jusqu'à la fin du problème, on note $S = [\![1,n]\!]$ et $\mathscr{G}_n$ l'ensemble des graphes (S,A) (avec A quelconque). On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \mathscr{G}_n$ tel que chaque arête possible apparaît de façon indépendante dans un graphe G de $\mathscr{G}_n$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$ fixé). On notera $q = 1 - p$. On désigne par $\mathscr{C}_k$ l'ensemble des k-cycles avec sommets dans S. Enfin, X_k, pour $3 \leq k \leq n$ désigne la variable aléatoire définie sur $\mathscr{G}_n$ telle que $X_k(G)$ représente le nombre de k-cycles appartenant à G.

Partie II - Exemples

22) Déterminer le nombre d'arêtes possibles pour un graphe à sommets dans $S = [\![1,n]\!]$.
23) En déduire que la probabilité de l'événement élémentaire $\{G_0\}$ où $\{G_0\}$ est le graphe donné en exemple au début de ce problème est p^5q^5.
Quelle est la probabilité de l'événement $\{G_0'\}$ (avec toujours $S = [\![1,5]\!]$) ?

Partie III - Espérance du nombre de k-cycles

24) Dans cette question $n = k = 3$. En remarquant qu'il n'existe qu'un seul graphe contenant un 3-cycle, déterminer la loi de X_3, son espérance, ainsi que sa variance que l'on exprimera à l'aide de p seulement.
25) On revient au cas général (n et k quelconques).
Montrer que le cardinal de $\mathscr{C}_k$ est $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{2k}$.
26) Pour chaque cycle C de $\mathscr{C}_k$ on désigne par X_C la variable aléatoire telle que pour G dans $\mathscr{G}_n$, $X_C(G) = 1$ si C est un sous-graphe de G et $X_C(G) = 0$ sinon.
Montrer que la probabilité $\mathbb{P}(X_C = 1)$ est égale à p^k.
27) Exprimer X_k à l'aide des variables aléatoires X_C.
28) En déduire l'espérance μ_k de X_k.

Partie IV - Fonction de seuil

Jusqu'à la fin du problème, on étudie le comportement de la loi de X_3 lorsque n tend vers $+\infty$ en supposant que p dépend maintenant de n : on notera p_n la probabilité qu'une arête donnée apparaisse de façon indépendante dans un graphe G de $\mathscr{G}_n$.
On cherche une *fonction de seuil* pour l'existence d'un 3-cycle dans un graphe donné, c'est-à-dire une suite (t_n) telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_3 \geq 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{t_n} = 0 \\ 1 & \text{si } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p_n}{t_n} = +\infty \end{cases}$$

29) Soit a un réel strictement positif et X une variable aléatoire définie sur $\mathscr{G}_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ d'espérance $\mathbb{E}(X)$. Montrer que :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

30) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_3 \geq 1) = 0$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} (np_n) = 0$.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que $\lim_{n\to+\infty} np_n = +\infty$.

31) On note μ_3 l'espérance de X_3 et σ_3 son écart-type. En utilisant la question 29, montrer que pour tout a réel strictement positif :

$$\mathbb{P}(|X_3 - \mu_3| \geq a) \leq \frac{\sigma_3^2}{a^2}$$

32) En déduire que si $\dfrac{\sigma_3^2}{\mu_3^2}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_3 \geq 1) = 1$ (on considérera $\mathbb{P}(X_3 = 0)$).

Si $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_1' = (S_1', A_1')$ sont deux graphes, on définit un nouveau graphe par :

$$G_1 \cup G_1' = (S_1 \cup S_1', A_1 \cup A_1')$$

33) Justifier que l'espérance de X_3^2 est :

$$\mathbb{E}(X_3^2) = \sum_{\substack{(C,C')\in\mathscr{C}_3^2 \\ C\subset G, C'\subset G}} \mathbb{P}(C\cup C')$$

34) Montrer que pour C et C' fixés dans $\mathscr{C}_3 \cap G$, en appelant i le nombre d'arêtes communes à C et C', $\mathbb{P}(C \cup C') = p_n^{6-i}$

35) En regardant les différentes valeurs possibles de i, montrer que $\dfrac{\mathbb{E}(X_3^2)}{\mu_3^2} \leq 1 + \varepsilon_n$ où $\lim_{n\to+\infty} (\varepsilon_n) = 0$.

36) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sigma_3^2}{\mu_3^2} = 0$.

37) Conclure qu'une fonction de seuil de l'existence d'un 3-cycle dans un graphe de $\mathscr{G}_n$ est la suite $(\dfrac{1}{n})$.

38) On admet que ce dernier résultat est encore valable pour les k-cycles avec k quelconque.
Montrer que si p est constante, la probabilité qu'un graphe de $\mathscr{G}_n$ contienne un k-cycle tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

***