Mathématiques II ESSEC
Option économique

Carine APPARICIO

Statistiques : Moyenne : 9.96, écart-type : 5.18.

Commentaires :

Le sujet de probabilité de cette année se proposait de répondre à la question suivante :

"combien de temps faut-il pour qu'un jeu de cartes soit convenablement mélangé" en partant d'un procédé très élémentaire de mélange : l'insertion répétée de la carte du dessus à une position choisie au hasard.

Le problème mettait en oeuvre de nombreuses notions du cours de probabilités discrètes, du cours d'analyse et du programme d'informatique.

Une des difficultés du sujet était de rentrer dans le texte qui comportait beaucoup de notations. Le candidat devait prendre le temps de lire attentivement le préambule pour bien comprendre la modélisation avant de se lancer dans la rédaction. Dans l'ensemble, les candidats s'y sont bien retrouvés. L'exemple du préambule et la partie I les y aidaient.
Nous conseillons aux futurs candidats de toujours faire l'effort de bien lire le texte. Cette lecture, qui demande du temps, est nécessaire pour comprendre un problème de modélisation et s'approprier les notations. Les exemples sont là pour aider le candidat, leur lecture est précieuse.

Dans l'ensemble, les copies sont bien présentées.

On compte quelques candidats de niveau très faible mais dans la plupart des copies, le cours est connu et les questions proches du cours donnent lieu à des réponses convenables. Le sujet permettait à un candidat appliqué de traiter correctement une grande partie des Parties 1 et 2 et de tirer son épingle du jeu. Seules les bonnes copies abordent correctement la fin de la Partie 1, les questions 11 et 12 de la Partie 2 et la Partie 3. La Partie 4 a permis aux candidats sérieux de se relancer et d'obtenir des points.

Concernant la précision de l'argumentation et la rigueur, c'est très variable selon le niveau des copies. Les bonnes copies se distinguent par une grande rigueur dans l'argumentation et dans les calculs. Nous rappelons aux candidats qu'il faut faire preuve d'honnêteté intellectuelle et qu'il est préférable d'admettre un résultat et de s'en servir dans la suite plutôt que d'évoquer des arguments visiblement hors-sujet ou très confus ou encore d'enchaîner manifestement deux erreurs de calculs pour retomber sur ses pieds.

Le détail des questions :

Partie 1 :

Tous les candidats rentrent dans le sujet. La sélection se fait pourtant dès les premières questions de la Partie 1 qui nécessitaient précision et qualité de rédaction. L'essentiel était d'avoir bien lu et bien compris le sujet.
<u>Question 2</u> : certains candidats donnent le bon résultat s'inspirant de la question suivante mais l'argumentation fait défaut (pas d'événements introduits, l'hypothèse d'indépendance n'est pas évoquée). Même critique en 3.a. Certains candidats reconnaissent la loi géométrique sans avoir besoin de calculer $\mathbf{P}(\Delta_i = k)$.
<u>Question 4.a</u> : il est souvent mentionné que la famille $(\Delta_1 = k)_{k\in[\![1,n-1]\!]}$ est un système complet d'événements. Parfois, les arguments d'incompatibilité et d'indépendance ne sont pas évoqués.
<u>Question 4.b</u> : les candidats ont souvent oublié de vérifier que la raison était différente de 1 avant d'appliquer la formule; parfois, l'habitude des séries géométriques convergentes les a conduit à évoquer une raison strictement plus petite que 1 en valeur absolue ce qui était gênant pour la raison $r = \frac{1-1/N}{1-2/N}$.
Les résultats étant fournis, certains candidats ont "triché" dans les calculs : par exemple, oubliant d'abord de mettre le premier terme en facteur, une deuxième faute vient miraculeusement compenser celle-ci et le

bon résultat est encadré à la fin. Cette attitude est sanctionnée et la copie perd du crédit aux yeux du correcteur.
Questions 5,6,7 : plus rarement abordées, elles ont permis aux meilleurs candidats de se mettre en valeur. Dans une excellente copie, un candidat a rédigé explicitement et avec précision la récurrence permettant de justifier la question 7.

Partie 2 :
Cette partie a permis de faire la sélection entre candidats. Les candidats sérieux ont abordé toutes les questions en particulier la question concernant la simulation informatique. Les très bons candidats ont montré leur savoir-faire sur les suites, séries, équivalents. Les excellents ont traité les questions 11 et 12.

Pour le détail :
Question 8 : étonnamment peu traitée, cette question utilisait pourtant des propriétés classiques de l'espérance et de la variance .
Question 9.a : très bien traitée en général. Mentionnons tout de même trop d'abus sur l'utilisation des équivalents. Les correcteurs ont souvent lus

$$\forall t \in [k,k+1],\ f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) \iff f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k)$$

Question 9.b : bien traitée en général.
Question 9.c : de nombreux candidats écrivent " la suite (u_n) étant décroissante et minorée par $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$, elle converge."
Par contre, une fois la convergence établie, l'encadrement de la limite est correctement justifié.
Question 10 : si l'équivalent $E(T) \sim N\ln(N)$ est fait par plus de la moitié des candidats (certains prenant tout de même pour acquis que $\ln(N+1) \sim \ln N$), le développement asymptotique est très rarement fait.
Lors de l'étude de la suite $\left(\frac{V(T)}{N^2}\right)_N$, peu d'étudiants reconnaissent la somme partielle d'une série de Riemann convergente.
Question 11.a : les valeurs absolues ne sont pas maîtrisées et l'inégalité triangulaire non plus.
On attendait une rédaction précise pour justifier l'inclusion des deux événements (une phrase pouvait suffire).
Question 13 : les questions d'informatique ont été abordées par une grande partie des candidats et elles ont fait gagner beaucoup de points à ceux qui les ont traitées avec soin. Répondre à ces questions demandait un effort de synthèse par rapport au sujet et de la précision syntaxique; le barême était généreux pour ces questions. Ne pas aborder les questions d'informatique est une mauvaise stratégie et nous encourageons les futurs candidats à se préparer dans ce sens.

Partie 3 :
Cette partie a été peu abordée. Certaines questions, particulièrement difficiles, n'ont été que très rarement abordées (questions 15 et 16 par exemple).

Les bons candidats ont bien répondu à la question 14.

Les correcteurs relèvent des difficultés notables avec les valeurs absolues dans la question 15.b. Certains candidats n'hésitent pas à écrire : "$a \leq b$ donc $|a| \leq |b|$".

Dans la question 14, le sujet aurait dû distinguer les cas selon que $n \geq N$ ou $n < N$. Si $n \geq N$, on a $\mathbf{P}(T \leq n) > 0$ et la probabilité conditionnelle est bien définie. Si $n < N$, on a $\mathbf{P}(T \leq n) = 0$ et directement l'égalité : $\mathbf{P}(E_n \cap (T \leq n)) = 0 = \pi(A)\mathbf{P}(T \leq n)$.

Partie 4 :
Les candidats solides ont pu reprendre la main dans cette partie et en ont été récompensés.

Conclusion : Sans décourager le candidat fragile, le problème a permis de repérer les candidats de valeur, sachant exploiter les étapes de l'énoncé et utiliser avec précision les outils de calcul du cours.
L'étalement des notes est satisfaisant, l'épreuve a bien joué son rôle en étant classante.

Correcteurs : Carine Apparicio, Patrick Bloch, Martin Canu, Hervé Chabert, Bernadette Gérardin, Christophe Gleize, Cécile Hardouin-Ceccantini, Philippe Heudron, Jean-Yves Larqué, Marie-Françoise Le Dantec, Claude Legrand, Élodie Massart, Laurent Mazliak, Andrée Meyer, Yves Montlibert, Armelle Vanot.