MATHEMATIQUES 2 E
(épreuve n°287)

Epreuve conçue par ESSEC

Voie économique

	NBRE CANDIDATS	MOYENNES	ECARTS-TYPE
RESULTATS GLOBAUX	2 381	8,96	4,77
VOIES PREPARATOIRES			
Economique	2 381	8,96	4,77
ECOLES UTILISATRICES			
HEC	1 209	11,13	4,46
ESSEC	1 451	10,71	4,49
ESCP-EAP	1 754	10,09	4,57
EMLYON Business School	2 290	9,04	4,75

DESCRIPTION DU SUJET

Le sujet proposait plusieurs variations autour de la notion de risque quadratique. Il comportait quatre parties de difficultés croissantes couvrant une large part du programme de probabilité.

- La partie I concernait les variables aléatoires à densité : elle était calculatoire mais conceptuellement simple. Elle permettait de tester les connaissances de cours et soulignait qu'un bon estimateur au sens du risque quadratique n'est pas nécessairement sans biais.
- La partie II concernait des variables aléatoires discrètes finies et infinies et proposait de mettre en compétition deux estimateurs d'un même paramètre.
- La partie III définissait la notion d'information de Fisher nécessaire au théorème de Cramer Rao énoncé dans la partie IV. Elle permettait de tester les candidats sur l'utilisation de la formule de transfert dans des cadres variés.
- La partie IV était plus théorique. On y étudiait une preuve dans un cas simple du théorème de Cramer-Rao. Pour terminer, il s'agissait d'utiliser ce théorème pour évaluer les performances des différents estimateurs de la partie II.

Remarques générales

Le sujet, très progressif, a semblé bien adapté aux candidats de la voie économique. Il a en tous cas permis de les classer correctement. Si un petit quart des candidats semblaient ne pas vraiment concourir, il y avait aussi un bon quart de bonnes ou très bonnes copies témoignant d'un cours bien appris et assez bien maîtrisé.

Les écarts de note se sont créés dès la partie I : les calculs ont souvent découragé les plus faibles. Le début de la partie II a souvent été bien traité, les questions 5, 6 et 7 permettant aux meilleurs de montrer leur maîtrise du cours et des calculs. La fin de cette partie redonnait la main à tous avec de l'analyse de première année. Les plus faibles se sont perdus dans les notations de la partie III mais beaucoup ont compris le travail à effectuer. Rares sont ceux qui sont rentrés correctement dans la sous-partie A de la partie IV, mais fort heureusement la plupart des candidats ont repris pied habilement à la question 4 de la sous-partie B.

Sans décourager le candidat fragile, le problème a permis de repérer les candidats de valeur, sachant exploiter les étapes de l'énoncé et utiliser avec précision les outils de calcul du cours.

Bilan détaillé de la correction

Partie I

I.1 Les trois aspects, continuité, positivité et intégrale égale à 1 sont traités.
Certains candidats affirment d'emblée (à tort) que f_θ est continue sur $\mathbf{R}$, d'autres étudient en détail la continuité en 0 et en θ (ce qui était inutile).
I.2 et I.3 pas de problème.
I.4 Des erreurs de calcul. Quelques candidats confondent le moment d'ordre 2 et la variance.
I.5 Bien fait en général.
Aucun candidat n'a été gêné par l'absence de l'hypothèse « T admettant une variance »
I.6 Assez bien fait. Certains candidats oublient que le biais est nul et développent tout au prix d'erreurs de calculs.
I.7 et I.8 De façon assez surprenante, parmi ceux qui ont un résultat correct à la question I.7 certains se perdent dans le raisonnement. Il y a des confusions entre le point λ^* où le maximum est atteint et la valeur du maximum $Q(\lambda^*)$.
I.9 Conclusion non abordée la plupart du temps ou très mal exprimée.

Partie II

II.1 Assez bien traitée dans l'ensemble. Le calcul de $P(Y_i = 1)$ suffit surtout si le calcul (assez fréquent) de $P(Y_i = 0)$ est mal effectué.
II.2 Souvent juste pour la loi même si l'indépendance est parfois omise.
Attention la valeur de l'espérance étant donnée, il est bien sûr inutile de tricher pour obtenir le résultat annoncé à tout prix.
II.3 Pas de remarque particulière.
II.4 Assez bien traitée. Des confusions entre les paramètres k et n.
II.5 Le début est fait

$$\varphi(j) = \frac{P(S_n = j, X_1 = 0)}{P(S_n = j)}$$

Mais le passage

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = j, X_1 = 0\right) = P\left(\sum_{i=2}^{n} X_i = j, X_1 = 0\right)$$

n'est pas bien posé ainsi que l'indépendance qui suit.
II.6 et II.7 Assez peu traitée. Très peu de candidats donnent la bonne hypothèse de convergence absolue. Ces trois questions ont en général départagé les meilleurs candidats des autres : connaissance du théorème de transfert, des séries exponentielles.
II.8 a. Le théorème des accroissements finis est mal connu : hypothèses précises, rédaction rigoureuse. Certains ne semblent connaître que $|f'(x)| \leq M$ comme hypothèse, d'autres passent par d'autres méthodes pour obtenir le résultat.

II.8 b. La dérivée est très souvent exacte, mais peu d'étude de signe correcte.
II.8 c. Assez bien traitée en général. Certains ont même admis la positivité de h pour pouvoir conclure.
II.8 d. La déduction immédiate de l'inégalité des variances sur celle des risques n'est pas vue. Certains candidats redéveloppent encore tout le risque.

Partie III

Section A

III.1 Bien traitée.

III.2 Peu de candidats reconnaissent la variance et préfèrent développer $(k-N\theta)^2$ pour faire apparaître $E(X^2), E(X)$ et applique ensuite la formule de Koenig-Huygens.

III.3 La convergence de la série n'est pas (ou peu) abordée.

Le calcul $(k-\theta)^2$ est développé, on est alors amené à considérer l'étude de plusieurs séries entraînant beaucoup de fautes de calcul.

Section B

III.1 L'égalité est trouvée mais la convergence est mal justifiée.

III.2 Certains développent le carré, peu reconnaissent directement la variance.

III.3 La formule de transfert est utilisée sans rappeler les hypothèses.

Partie IV

Partie très peu abordée.

Il y a parfois des arguments fantaisistes comme :

- $p(\theta,k)$ ne dépend pas de θ donc $\frac{\partial}{\partial\theta}p(\theta,k)=0$.
- $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta,1)=\frac{\ln p(\theta,1)}{\theta}$ en simplifiant par « ∂ ».