MATHÉMATIQUES 2S (épreuve n° 283)

ANNÉE 2013

Épreuve conçue par CCIR

Voie économique et commerciale
Option scientifique

Le sujet

L'objectif du problème de cette année était d'introduire une famille de lois de probabilité discrètes, dites lois de Poisson mélangées, construites en considérant le paramètre d'une loi de Poisson comme aléatoire. Ces lois, parmi lesquelles figure la loi binomiale négative généralisée définie dans la partie I, jouent un rôle important dans les applications, notamment en mathématique de l'assurance, car elles permettent de modéliser le nombre d'apparitions d'événements aléatoires provenant de sources hétérogènes.

Alors que la loi de Poisson permet par exemple de représenter convenablement la distribution du nombre de sinistres d'un portefeuille de polices d'assurance dont les assurés présentent des risques identiques, ces lois, définies dans la partie III, restent utilisables pour des portefeuilles ayant une structure de risque complexe.

Quant à la monotonie d'une famille de lois vis-à-vis d'un paramètre, définissable par l'intermédiaire des inégalités stochastiques introduites dans la partie II, il s'agit d'une notion fort utile pour la construction d'intervalles de confiance ou de tests, qui est illustrée par l'exemple des lois de Poisson et, en fin de problème, par celui des lois binomiales négatives généralisées.

Les résultats statistiques

La note moyenne des 3241 candidats ayant participé à cette épreuve s'établit à 10,38 avec un écart-type de 4,98.

Plus de 40% des candidats obtiennent une note supérieure à 12 et environ 14% de l'ensemble des candidats se voient attribuer une note supérieure à 16 ; enfin, 2,6% de candidats, soit une centaine, se situent entre 19 et 20, et parmi ceux-ci, 52 obtiennent la note maximale de 20.

Le barème de notation accordait aux trois parties du problème les poids respectifs de 37%, 40% et 23%. Les meilleures copies réalisent les 2/3 du problème, c'est-à-dire la partie I, la moitié de la partie II et quelques questions de la partie III.

Commentaires

Les remarques générales qui ressortent de l'examen des copies sont les suivantes :

3.d) La formule de Taylor est bien connue mais ses hypothèses sont souvent omises ou escamotées.
3.e) Pour la seconde inégalité, beaucoup de candidats parviennent à une expression qui exigerait une application de l'inégalité des accroissements finis pour conclure et certains y parviennent au prix « d'escroqueries » manifestes. Rappelons à cet égard que toute tentative de « bluff » ou de tricherie a une incidence négative sur la note finale de son auteur.
5.a) Cette question difficile a été rarement bien résolue.
5.b) Beaucoup de candidats ont confondu X_n et $X^{<n>}$. Cela les amène à trouver une variance (fausse) avec un facteur $1-2p$, qui ne serait donc pas toujours positive !

6) Cette question est souvent bien résolue par les candidats mais on trouve dans quelques copies : « on a vu en cours que la somme de deux lois binomiales négatives est binomiale négative » !

La résolution des questions de la partie II a fait l'objet de résultats très contrastées : certains candidats se ressaisissent à cette occasion, d'autres se retrouvent « submergés » et commettent des erreurs de syntaxe en confondant variable aléatoire et événement.

8.a) Cette question est généralement bien traitée même si on trouve parfois des calculs curieux tels que $\Phi(-1).\Phi(-1) = 2\,\Phi(-1)$.
8.b) Une erreur fréquente consiste à écrire que pour tout réel x, on a l'inégalité $(x\text{-}1)^2 \leq (x+1)^2$.
9. Une minorité de candidats lisent la question avec suffisamment d'attention pour en comprendre l'objet. Ainsi, beaucoup ne remarquent pas que k est un entier naturel et ne pensent pas à la partie entière.
10.b) La confusion entre $X+Z$ et Y est révélatrice de l'absence de distinction entre deux variables aléatoires égales et deux variables aléatoires de même loi. Beaucoup de candidats « démontrent » l'inégalité stochastique par comparaison des probabilités individuelles et ne trouvent donc pas choquant que l'on puisse avoir, pour tout entier naturel k, l'inégalité suivante : $P(X=k) < P(Y=k)$!!
11.a) Certains programmes, parfois récursifs, « tournent », d'autres pas. Souvent, les programmes sont d'une longueur excessive (par exemple, avec trois boucles et parfois, on recommence les calculs depuis le début dans la troisième).
12.d) Presque tous les candidats n'ont pas réussi à traiter correctement cette question.

Beaucoup de candidats abordent la partie III, mais avec des succès très mitigés.

14. Cette question a fait l'objet d'un nombre d'erreurs de raisonnement impressionnant ! Les candidats ne tiennent pas compte des hypothèses et la plupart d'entre eux s'appuient sur le « fait » que f tend vers 0 en 0 et $+\infty$, est négligeable devant ce que bon leur semble, est bornée, continue sur $\mathbf{R}_+$, etc.
15.a) Question dont la difficulté n'a été perçue par aucun candidat.
15.b) Même remarque qu'en a) car on ne leur « conte » presque plus jamais la « saga » des epsilons.
16.a) Les candidats connaissent presque tous la loi gamma et aucune sanction n'a été prise à l'encontre de ceux qui inversent l'ordre des deux paramètres mais qui donnent une espérance et une variance correctes (la notation du programme n'a, en effet, rien d'universel).