## MATHEMATIQUES II (S) 2008
## (épreuve n°283)

## Epreuve conçue par CCIP

## Voie scientifique

| | NBRE CANDIDATS | MOYENNES | ECARTS-TYPE |
|---|---|---|---|
| RESULTATS GLOBAUX | 3 114 | 9,88 | 5,57 |

| VOIES PREPARATOIRES | | | |
|---|---|---|---|
| Scientifique | 3 314 | 9,88 | 5,57 |

| ECOLES UTILISATRICES | | | |
|---|---|---|---|
| HEC | 2 154 | 11,67 | 5,15 |
| ESSEC | 2 268 | 11,55 | 5,17 |
| ESCP-EAP | 2 571 | 10,94 | 5,31 |
| EM Lyon | 3 032 | 10,00 | 5,54 |

### Le sujet

*Le problème de cette année avait pour objet la démonstration de « l'inadmissibilité » (risque quadratique non minimal), lorsque $p \geq 3$, de l'estimateur $\hat{\theta}$ du maximum de vraisemblance de l'espérance $\theta$ d'une loi normale à p dimensions, en mettant en évidence un estimateur $\bar{\theta}$ biaisé mais de risque quadratique inférieur à celui de $\hat{\theta}$ (estimateur de James-Stein).*

*Les principaux outils mathématiques utilisés étaient la transformation de Laplace, le théorème de transfert, la loi normale et ses dérivées (loi $\gamma$, loi du $\chi 2$), les lois conditionnelles, les notions d'estimateur et d'espérance conditionnelle.*

*Le préliminaire, faisant essentiellement appel à des techniques de calcul, se proposait de déterminer la transformée de Laplace de différentes lois de variables aléatoires. Les réponses à toutes les questions de ce préliminaire étaient données dans l'énoncé : on attendait donc des candidats une rédaction très précise et argumentée.*

*Dans la partie I, relativement classique, on étudiait quelques propriétés de la loi du $\chi 2$ centré, et on établissait la formule d'un intervalle de confiance au risque $\alpha$ pour la variance $\sigma^2$ d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.*

*La partie II généralisait la partie précédente en introduisant la loi du $\chi 2$ décentré à n degrés de liberté et en calculant la transformée de Laplace d'une telle loi.*

*La partie III, en étendant la formule de l'espérance totale au cas des variables aléatoires à densité, permettait de mettre en évidence la loi d'une somme de variables aléatoires.*

*Enfin dans la partie IV, on comparait les risques quadratiques des deux estimateurs $\bar{\theta}$ et $\hat{\theta}$, ce qui permettait d'obtenir l'expression de l'estimateur de James-Stein.*

***Les résultats statistiques***

*Sur l'ensemble des 3114 candidats ayant composé dans cette épreuve, la note moyenne est de 9,88 avec un écart-type particulièrement élevé de 5,57 : il est vraisemblable que ce sujet a joué son rôle en classant les candidats tout en distinguant les meilleurs d'entre eux.*
*Les résultats par école sont :*

- *HEC (2.154 candidats) – moyenne : 11,67 ; écart-type : 5,15.*
- *ESCP- EAP (2.571 candidats) – moyenne : 10,94 ; écart-type : 5,31.*

***Erreurs les plus fréquentes***

*Les candidats, dans leur majorité, entreprennent beaucoup de calculs : ils n'utilisent pas les résultats des questions précédentes et font rarement appel au théorème du transfert. De plus, ils confondent souvent « équivalence » et « implication ».*

*Préliminaire (22% de la note finale).*
*On y relève de nombreuses erreurs liées à une maîtrise insuffisante du cours d'analyse, notamment des questions relatives à la convergence des intégrales impropres. Ainsi :*

- *Certains candidats exhibent une primitive de exp $(-x^2)$.*
- *On voit très souvent le « théorème » suivant : une fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 0$.*
- $\int_{-X}^{+X} f(x)\,dx$ *tend vers 0 lorsque X tend vers +∞, donc* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *existe et vaut 0.*
- $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ *existe si et seulement si $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers +∞.*
- *Au voisinage de +∞, on a $ax^2 + bx \sim ax^2$, donc exp $(ax^2 + bx) \sim \exp(ax^2)$*
- *Puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$, on remplace 1/2 par a et on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-ax^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ .*
- *Si $a \geq 0$, alors $\exp(-ax^2) \leq \exp(-x^2)$*

*Partie I (21% de la note finale).*

*Dans la question 1, l'étude d'une fonction du niveau de classe Terminale et sa représentation graphique semblent relever de la haute virtuosité. Ainsi a-t-on vu des densités négatives, des confusions entre f' et f'', des points anguleux au sommet de la courbe. Une très faible proportion de candidats fait apparaître les tangentes à l'origine et la limite en +$\infty$ dans l'étude des variations et le tracé.*

*La question 4 relative à la détermination d'un intervalle de confiance, n'a été traitée que dans quelques copies ; la représentation graphique de la question 1 aurait dû permettre aux candidats de visualiser la non-symétrie de cet intervalle.*

*Partie II (20% de la note finale).*

*Cette partie fut peu traitée par les candidats ; parmi ceux qui l'ont abordée, on constate de nombreuses erreurs concernant la notion d'indépendance. Ainsi :*

- $E(U^3)=0$ *car* $E(U^3)=E(U^2)E(U)$, *puisque* $U$ *et* $U^2$ *sont indépendantes, et également,* $E(U^4)=\left(E(U^2)\right)^2$.
- *L'indépendance des variables aléatoires n'est pas invoquée dans la stabilité de la loi gamma.*
- *Des variables aléatoires de même loi sont égales, donc* $W_n = nX_1$ *car les* $X_i$ *suivent la même loi.*

*Partie III (28% de la note finale).*

*Cette partie fait largement appel à la notion d'espérance conditionnelle et généralise la formule de l'espérance totale à une variable aléatoire à densité. La question 1 permet de vérifier cette formule sur un exemple, et la question 2, qui n'a pas été souvent abordée (en particulier la question 2c), avait pour finalité l'expression de l'espérance de l'inverse d'une variable aléatoire qui suit une loi du* $\chi 2$ *décentré à l'aide de l'espérance d'une fonction d'une variable aléatoire de Poisson.*

*Hormis les questions non traitées par les candidats, les principales erreurs proviennent des confusions entre variable aléatoire et loi de probabilité : on note toujours dans les copies, des « variables conditionnelles » ou des « événements conditionnels », et il est rare de rencontrer la définition d'une loi conditionnelle ou de la probabilité conditionnelle de A sachant B (pourtant au programme de la première année).*

*Partie IV (9% de la note finale).*

*De nombreux candidats ont entrepris directement la résolution de cette courte partie. Les calculs étaient élémentaires, mais même les dernières questions (calcul de c et écriture de $\bar{\theta}$) ont réservé bien des surprises...*

*Enfin pour terminer, signalons l'apparition dans certaines copies (heureusement peu nombreuses) d'expressions pour le moins obscures : « on procède par pilotage riemannien », « facettes de la fonction gamma » ou « d'après le CCIIFP ».*

### ***Recommandations aux futurs candidats***

*Le jury demande aux candidats une lecture attentive du texte qui précède toute épreuve de mathématiques, dans lequel il est précisé que la lisibilité et la qualité de la rédaction entrent pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies.*

*Il est également conseillé de numéroter ses questions et d'encadrer ses résultats. Les raisonnements doivent être clairs et précis et les affirmations argumentées. Un apprentissage sérieux et une connaissance approfondie du cours sont donc indispensables.*