Code sujet : 283

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESCP BS – HEC Paris

MATHÉMATIQUES 2 APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Vendredi 25 avril 2025, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

- Notations et rappels -

- Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- Si Z est une variable aléatoire réelle, on note $\mathbb{E}(Z)$ son espérance et $\mathbb{V}(Z)$ sa variance, si elles existent.
- On note φ et Φ les fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \ , \ \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) \mathrm{d}t.$$

- On rappelle que la fonction Gamma est définie pour tout réel $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

  et vérifie, pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

- Pour les programmes Python, on dispose d'un petit formulaire à la fin du sujet. On importe aussi les bibliothèques suivantes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
```

- Le mot **FIN** marque la fin de l'énoncé.

Première partie

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On suppose que $X_i(\omega) \neq 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

La loi de S_n est appelée **loi du khi-deux** à n degrés de liberté, et on notera $S_n \hookrightarrow \chi^2(n)$.

On pose aussi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \frac{1}{2}S_n$.

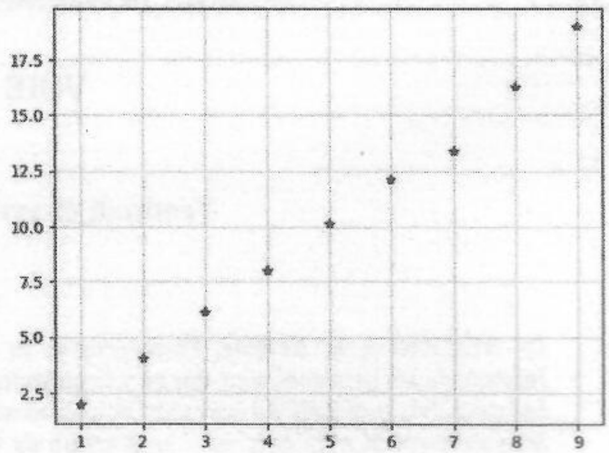
1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(S_n)$. On admet que $\mathbb{E}(S_n^2)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Écrire une fonction Python `simul(n)` qui renvoie une réalisation de S_n lorsqu'on lui fournit un entier naturel non nul n en entrée.

   (c) On exécute ensuite le programme suivant :

```
def f(n, N):
    t = 0
    for k in range(N):
        t = t + simul(n)**2
    return t/N - n**2

A = np.arange(1,10)
B = np.zeros(9)
for n in A:
    B[n-1] = f(n, 50000)
plt.plot(A, B, "*k")
plt.grid()
plt.show()
```



   On obtient la figure ci-contre.
   Que peut-on conjecturer sur la variable aléatoire S_n ?
   Expliquer ce qui motive votre conjecture.

2. (a) Montrer que W_1 est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de W_1.

   (b) En déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, W_n suit la loi gamma $\gamma\left(\frac{n}{2}\right)$.

   (d) Retrouver alors la valeur de $\mathbb{E}(S_n)$ et déterminer la valeur de $\mathbb{V}(S_n)$.

3. (a) Montrer que, pour tout entier n, $n \geq 3$, $\frac{1}{W_n}$ admet une espérance et que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{W_n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

   En déduire que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-2}$.

   (b) Déduire de la question précédente que, pour tout entier n, $n \geq 3$, $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet une espérance.

Soit Y une variable aléatoire indépendante des $(X_k)_{k\geqslant 1}$ et de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

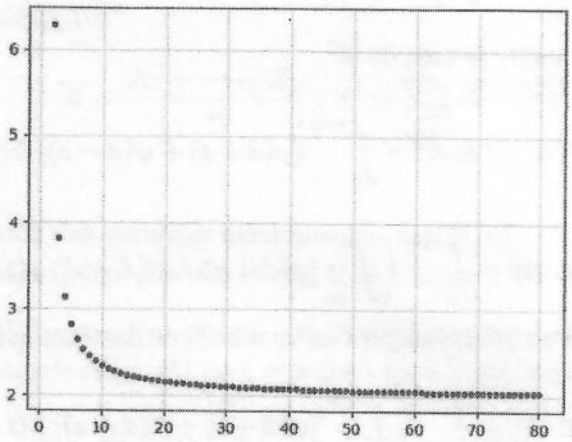
$$T_n = \frac{Y}{\sqrt{S_n/n}}.$$

La loi de T_n est appelée **loi de** STUDENT de paramètre n et on note $T_n \hookrightarrow \mathcal{T}(n)$.
On admet que T_n est une variable aléatoire à densité possédant une densité strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer l'existence et l'unicité d'un réel $t_{n,\alpha}$ tel que $\mathbb{P}(|T_n| \leq t_{n,\alpha}) = 1-\alpha$.
5. (a) Montrer que, pour tout n entier, $n \geqslant 3$, $\mathbb{E}(T_n)$ existe et vaut 0 .
   (b) Montrer que, pour tout n entier, $n \geqslant 3$, $\mathbb{V}(T_n)$ existe et vaut $\dfrac{n}{n-2}$.
   (c) En déduire que, pour tout n entier, $n \geqslant 3$, $\mathbb{E}\big((T_n - Y)^2\big) = \dfrac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\,\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$.
6. Pour tout n entier, $n \geqslant 2$, on pose : $u_n = \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et déterminer la valeur de u_2.
   (b) Montrer que, pour tout entier n, $n \geqslant 2$, on a $u_{n+1}.u_n = \dfrac{2}{n-1}$.
   (c) Écrire une fonction Python d'entête **suite_u(n)** qui renvoie sous la forme d'un tableau **numpy** les **n** $-$ **1** valeurs $u_2, u_3, \ldots, u_n$.
   (d) On exécute ensuite le programme suivant :

```
U = suite_u(80)
V = np.arange(2,81)
plt.plot(V,V*U**2,".k")
plt.grid()
plt.show()
```

   On obtient la figure suivante :



   Que peut-on conjecturer concernant la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?
   (e) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}$.
7. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geqslant 2}$ converge en probabilité vers Y.

Deuxième partie

Dans cette partie, on démontre le résultat suivant :

Théorème : Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, chacune de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Les variables aléatoires $\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}$ sont alors indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Pour la preuve, on fera appel au résultat suivant qu'on utilisera sans preuve :

 Tournez la page S.V.P.

Théorème : Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de densités respectives f et g. Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ une partie fermée. Alors :

$$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y) f(x) dx \right) g(y) dy,$$

où $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y)$ vaut 1 si $(x,y) \in \mathcal{A}$ et vaut 0 sinon.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés jusqu'à la fin de cette partie. On considère la partie $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\mathcal{A} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq a \quad \text{et} \quad x-y \leq b \right\}.$$

On pose également $c = \dfrac{a+b}{2}$, $d = \dfrac{a-b}{2}$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, chacune de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On pose $W = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $Z = \dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}$.

8. Dessiner la partie $\mathcal{A}$ dans le cas où $a = 2$, $b = -1$.

9. Soit y un réel tel que $y \geq d$.
   (a) Montrer que $(x,y) \in \mathcal{A}$ si et seulement si $x \in]-\infty, a-y]$.
   (b) En déduire que
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y) \varphi(x) dx = \Phi(a-y).$$

10. Montrer de la même façon que pour tout $y \leq d$ on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x,y) \varphi(x) dx = \Phi(b+y).$$

11. (a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
    (b) Montrer que
    $$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{A}) = \int_0^{+\infty} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z)) \Phi(c-z) dz.$$

12. Montrer que :
$$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{A}) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{c} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z)) \varphi(t-z) dt \right) dz.$$

On admet pour la suite que l'on peut changer l'ordre d'intégration dans la formule précédente, c'est-à-dire que l'on a :
$$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{c} \left(\int_0^{+\infty} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z)) \varphi(t-z) dz \right) dt.$$

13. Montrer que pour tous u, v réels on a : $\varphi(u)\varphi(v) = \varphi\left(\dfrac{u+v}{\sqrt{2}}\right) \varphi\left(\dfrac{u-v}{\sqrt{2}}\right)$.

14. Montrer que :
$$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{A}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{c} \left(\varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) + \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right) \right) dt.$$

15. Montrer que :
$$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{A}) = \Phi\left(\frac{c+d}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{c-d}{\sqrt{2}}\right).$$

16. Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Troisième partie

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien standard que l'on notera $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On considère une base orthonormée $(a_1,\dots,a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $a_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\dots,1)$.

17. Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $\overline{x} = \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.

    (a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\langle x, a_k\rangle a_k = (x_1-\overline{x},\dots,x_n-\overline{x})$.

    (b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\langle x, a_k\rangle^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$.

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $X = (X_1,\cdots,X_n)$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note $\langle X, a_k\rangle$ la variable aléatoire Y_k définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $Y_k(\omega) = \langle X(\omega), a_k\rangle$. Quitte à modifier les Y_k sur un ensemble de probabilité nulle, on peut supposer que $Y_k(\omega) \neq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Dans le reste du problème on utilisera sans preuve le théorème de COCHRAN :

Théorème : Les variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_n$ sont mutuellement indépendantes, chacune de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

18. (a) Retrouver le résultat de la deuxième partie à l'aide du théorème de COCHRAN.

    (b) Soit $(\beta_1,\beta_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Montrer que les variables aléatoires $R_1 = X_1+X_2$ et $R_2 = \beta_1X_1+\beta_2X_2$ sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(R_1,R_2) = 0$.

19. On introduit les variables aléatoires :

$$\overline{X} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\ ,\ U = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

    (a) Donner la loi de $\overline{X}$.

    (b) Exprimer $\overline{X}$ et U à l'aide des variables aléatoires Y_k, $k \in [\![1,n]\!]$.

    (c) Montrer que $\overline{X}$ et U sont indépendantes et que U suit la loi $\chi^2(n-1)$.

On suppose pour la fin de ce problème que $Z = (Z_1,\dots,Z_n)$ est un n-uplet de variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune de loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ avec $\sigma > 0$ où (μ,σ^2) est inconnue. On pose :

$$\overline{Z} = \frac{Z_1+\cdots+Z_n}{n}\ ,\ V = \sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2.$$

Comme précédemment, on pourra supposer que $V(\omega) \neq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$.

20. (a) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $X_i = \dfrac{Z_i-\mu}{\sigma}$. On pose de plus $\overline{X} = \dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ et $U = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. Exprimer V en fonction de U et σ.

    (b) En déduire que $\dfrac{1}{n-1}V$ est un estimateur sans biais de σ^2.

    (c) Montrer que $\dfrac{\overline{Z}-\mu}{\sqrt{\frac{V}{n(n-1)}}}$ suit la loi de STUDENT $\mathcal{T}(n-1)$.

21. Soit $\alpha \in]0,1[$ et $t_{n-1,\alpha}$ le réel tel que $\mathbb{P}(|T| \leq t_{n-1,\alpha}) = 1-\alpha$ lorsque $T \hookrightarrow \mathcal{T}(n-1)$. Construire, en fonction de $\overline{Z}$, V, n et $t_{n-1,\alpha}$, un intervalle de confiance de μ au niveau de confiance $1-\alpha$.
Dans la pratique, les valeurs $t_{n-1,\alpha}$ sont tabulées et permettent ainsi la construction d'intervalles de confiance non asymptotiques pour des modèles gaussiens.

I. Mathématiques générales

```
import numpy as np
```

`np.pi`	Renvoie une valeur approchée de π.
`np.linspace(a, b, n)`	Crée une matrice ligne de n valeurs uniformément réparties entre a et b (inclus).
`np.zeros([n,m])`	Crée la matrice nulle de taille $n \times m$.
`np.zeros(n)`	Crée la matrice ligne nulle de taille n.
`np.arange(a,b,eps)`	Renvoie la liste des flottants de a à b (non compris) de pas constant eps.
`np.shape(M)`	Donne la taille de la matrice M sous forme d'un tuple (couple).

II. Simulations probabilistes

```
import numpy.random as rd
```

`rd.exponential (a, [q,r])` `rd.exponential (a, n)`	Simule une réalisation d'une matrice (resp d'un vecteur) aléatoire de dimension (q,r) (resp n) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{E}(\frac{1}{a})$.
`rd.normal(m,d,[q,r])` `rd.normal(m,d,n)`	Simule une réalisation d'une matrice (resp d'un vecteur) aléatoire de dimension (q,r) (resp n) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{N}\left(m,d^2\right)$
`rd.gamma(m,a,[q,r])` `rd.gamma(m,a,n)`	Simule une réalisation d'une matrice (resp d'un vecteur) aléatoire de dimension (q,r) (resp n) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\Gamma\left(m,a\right)$.

III. Graphiques

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

`plt.plot(X,Y,options)`	Génère la courbe des points définis par les listes X et Y suivant les options graphiques définies par la chaîne de caractère options.
`plt.grid()`	Affiche le quadrillage
`plt.show()`	Affiche le graphique.

FIN