

MATHÉMATIQUES S (épreuve n° 280)

ANNÉE 2013

Épreuve conçue par H E C Paris

Voie économique et commerciale
Option scientifique

Le sujet

Le thème du problème de cette année était la théorie du contrôle, c'est-à-dire l'analyse de systèmes dynamiques sur lesquels on peut exercer une action au moyen d'une commande (ou contrôle), l'objectif consistant à amener le système d'un état initial donné à un état final prescrit (cible) en temps fini (le système est alors contrôlable), en respectant certains critères (minimisation d'un coût, par exemple).

L'objet du problème concernait une caractérisation simple de la contrôlabilité, due à Kalman, dans le cas particulier de systèmes linéaires en dimension finie.

Les applications de la théorie du contrôle sont nombreuses et variées. En particulier en économie, les modèles de croissance économique optimale qui prolongent le modèle de Solow utilisent des techniques mathématiques que l'on trouve dans la théorie du contrôle et qui reposent sur le principe du maximum de Pontryagin et la notion de hamiltonien : maximisation sur un horizon infini de la somme actualisée des utilités découlant de différents niveaux de consommation sous une contrainte d'évolution du capital par tête.

De même, en gestion ou dans certains modèles d'aide à la décision (programmation dynamique), on utilise des résultats mathématiques issus de la théorie du contrôle : équations de Hamilton-Jacobi-Bellman ou encore équations différentielles matricielles de Riccati.

Bien entendu, étant donné les limites du programme de mathématiques des classes préparatoires commerciales, aucun exemple ne pouvait illustrer le problème de cette année.

Les résultats statistiques

Le barème de notation accordait des poids quasiment identiques aux trois parties du problème.

Sur les 2625 candidats présents à cette épreuve, la note moyenne s'établit à 10,52 avec un écart-type de 4,64.

La note médiane est de 10,4 ; un quart des candidats obtient une note inférieure à 7,4 et 75% des candidats ont obtenu une note supérieure à 13,9.

Environ 38% des candidats obtiennent une note supérieure à 12 et près de 15% des candidats se voient attribuer une note supérieure à 16. On observe enfin 2,7% des candidats qui obtiennent une note supérieure à 19 dont 51 d'entre eux qui culminent à 20.

La note maximale de 20 fut accordée aux candidats ayant résolu avec succès au moins les deux tiers du problème.

Commentaires

Les trois parties du problème étaient dans une large mesure indépendantes et les candidats ont abordé les parties I et II ou les parties I et III.

On observe moins de très mauvaises copies par rapport aux concours des années précédentes.

La partie I portait sur certaines propriétés de l'exponentielle d'une matrice, la partie II établissait des résultats sur les polynômes annulateurs sur le corps des complexes ou des réels et introduisait les matrices de Kalman. La troisième et dernière partie portait sur le contrôle proprement dit, d'abord d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, puis dans le cas d'un système de dimension n , puis dans le cas discret.

La première partie était très progressive, traitant du calcul de l'exponentielle dans un cas particulier, puis dans des cas plus généraux. Des connaissances élémentaires en algèbre linéaire étaient sollicitées et les premières questions furent correctement résolues par la majorité des candidats ; ceux-ci eurent plus de difficultés pour la question 2.a) qui nécessitait surtout de savoir appliquer la définition du produit de matrices, ainsi que dans les questions suivantes qui demandaient d'établir soigneusement la convergence de séries numériques puis de séries matricielles. Cependant, les résultats intermédiaires fournis par l'énoncé permettaient de poursuivre. La dernière question de cette partie I n'a été traitée que dans les meilleures copies.

La deuxième partie a été moins bien traitée, notamment la question 6.a), plus subtile, qui était nécessaire à la résolution de la question suivante (récurrence). Néanmoins, les candidats qui avaient bien suivi l'énoncé pouvaient poursuivre le raisonnement.

La dernière partie, qui commençait par des questions d'analyse, a été abordée par la quasi-totalité des candidats. Dans la question 11.b), les copies dans lesquelles les candidats faisaient preuve d'une compréhension claire de la définition donnée du contrôle et n'oubliaient pas le cas particulier $a=0$, furent particulièrement valorisées.

A peine 1% des candidats ont abordé les questions 13 et 14.