

MATHEMATIQUES S (épreuve n° 280)

ANNEE 2012

Epreuve conçue par H E C

Voie Scientifique

	NBRE CANDIDATS	MOYENNES	ECARTS-TYPE
RESULTATS GLOBAUX	2 501	10,54	4,68

VOIES PREPARATOIRES			
Scientifique	2 501	10,54	4,68

ECOLES UTILISATRICES			
HEC Paris	2 214	10,99	4,61
ESCP-EUROPE	2 448	10,61	4,67
ENSAE	400	12,76	4,48

Le sujet

Le problème avait pour objet la mise en évidence de quelques propriétés de l'entropie de variables aléatoires discrètes et à densité.

L'entropie, liée à la notion d'information (ou d'indétermination) introduite par Shannon, ne dépend que de la distribution de probabilité des variables aléatoires et mesure la quantité d'information apportée par le résultat d'une épreuve qui dépend du hasard. L'entropie possède des propriétés propres à son origine probabiliste, notamment dans le domaine des sciences humaines et en finance.

Le sujet couvre une assez large partie du programme d'analyse et de probabilités et fait appel à peu de calculs mais à des raisonnements assez fins (question 9 et partie IV par exemple).

La partie I, très progressive, établissait dans un cadre très général, des inégalités de concavité dans lesquelles intervenaient des intégrales généralisées et des séries.

Dans la partie II, on définissait l'entropie d'une variable aléatoire à densité ainsi qu'une « entropie relative » (distance de Kullback-Leibler) ou gain d'information.

La partie III s'intéressait à l'entropie des variables aléatoires discrètes finies et à valeurs dans \mathbb{N}^* . On y déterminait en particulier les lois à entropie maximale.

Enfin, la partie IV proposait une application des résultats précédents à la découverte d'une stratégie optimale dans le cadre de courses hippiques : le critère de Kelly, qui maximise le taux de rendement asymptotique des paris, est en étroite relation avec la notion d'entropie.

Les résultats statistiques

Le barème de notation accordait les poids suivants aux 4 parties du problème : 26% à la partie I, 16% à la partie II, 34% à la partie III et 24% à la partie IV.

L'harmonisation des résultats obtenus par les différents correcteurs de cette épreuve a permis d'établir un classement discriminant des candidats et de dégager les meilleurs d'entre eux.

La note médiane est de 10,6 ; un quart des candidats obtient une note inférieure à 7,3 et 75% des candidats ont obtenu une note supérieure à 14,1.

Environ 38% des candidats obtiennent une note supérieure à 12 et près de 15% des candidats se voient attribuer une note supérieure à 16. On observe enfin 3% des candidats qui obtiennent une note supérieure à 19 dont 49 d'entre eux qui culminent à 20.

La note maximale de 20 fut accordée aux candidats ayant résolu avec succès au moins 75% du problème, c'est-à-dire les 3 premières parties et éventuellement le début de la dernière partie.

Commentaires

Globalement, le sujet a été abordé de façon positive par les candidats, les copies sont rarement complètement vides, souvent bien présentées et assez faciles à lire.

Le problème comportait suffisamment de questions « de cours » pour qu'un candidat moyen mais consciencieux puisse s'en sortir honorablement. Il arrive cependant que l'aspect rhétorique de l'argumentation (telle fonction est de classe C^2) donne un volume un peu trop important.

Dans la partie I, les contradictions fréquentes entre les études de fonctions et les représentations graphiques ou les limites n'ont pas été remarquées. Les inégalités conduisent souvent à des erreurs : $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$ implique $0 < x/y < 1$ par exemple.

Dans la partie II, la densité continue de la loi normale est bien connue et les calculs d'entropie sont en général corrects. En revanche, la question 7 conduit très souvent à des affirmations incomplètes donc fausses.

Dans la partie III, beaucoup de candidats savent correctement traiter la question 8 concernant les extremums liés. La question 9 est fort mal comprise : problèmes liés au signe du logarithme et surtout à la « croyance » que l'inégalité $p_n \leq 1/n^3$ est valable pour tout n .

La simulation d'une variable aléatoire en Pascal est visiblement un thème bien travaillé par nombre de candidats.