

MATHEMATIQUES I 2008
(épreuve n°280)

Epreuve conçue par HEC

Voie scientifique

	NBRE CANDIDATS	MOYENNES	ECARTS-TYPE
RESULTATS GLOBAUX	2 610	10,02	4,38

VOIES PREPARATOIRES			
Scientifique	2 610	10,02	4,38

ECOLES UTILISATRICES			
HEC	2 154	10,71	4,20
ESCP-EAP	2 569	10,08	4,36
ENSAE	335	12,37	3,91

Le sujet

Le problème avait pour objet l'étude de quelques aspects mathématiques liés à la recherche du minimum d'une fonction F de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} , et constituait une introduction à l'analyse des algorithmes de Gauss-Newton et de Levenberg-Marquardt. Ces algorithmes permettent d'obtenir une solution numérique au problème de minimisation d'une fonction de plusieurs variables dans le cadre d'un modèle de régression multiple (linéaire ou non), par exemple.

Les trois exemples de la partie 1 avaient pour but, d'une part, de rappeler les notions de gradient et de matrice hessienne, et d'autre part, de définir la matrice jacobienne pour en déterminer les liens avec le gradient et la hessienne. Dans la partie 2, à partir d'une approximation $L(h)$ de $F(X+h)$ et de résultats d'algèbre linéaire, on prouvait l'existence d'un minimum local de L (ce qui constitue un préalable à l'étude de l'algorithme de Gauss-Newton). Dans la partie 3, la décomposition en valeurs singulières de la matrice jacobienne J permettait de réduire les inconvénients liés à l'inversion numérique de la matrice G en remplaçant celle-ci par la matrice $G + \mu I$, où μ est un paramètre réel

strictement positif (facteur d'amortissement) que l'on peut ajuster à chaque itération de l'algorithme. Le problème s'achevait sur la mise en évidence d'un minimum pour une nouvelle approximation $M(N)$ de $F(X+N)$. On pourrait alors utiliser l'algorithme de Levenberg-Marquardt, par exemple, pour calculer avec une précision donnée, un minimum local de F .

Les résultats statistiques

Le degré de difficulté des questions étant très progressif, le sujet, tout en conservant son caractère sélectif, avait l'avantage de donner aux candidats la possibilité de s'exprimer.

Le barème de notation accordait 40% de la note finale à la partie 1, 27% à la partie 2 et 33% à la partie 3.

Sur l'ensemble des 2.610 candidats à cette épreuve, la note moyenne s'établit à 10,02 avec un écart-type de 4,38. La note maximale de 20 fut attribuée à une vingtaine de candidats ayant résolu correctement 75% du problème. Environ 300 candidats (12%) ont obtenu une note supérieure à 16, et 25% d'entre eux, une note excédant 12. Les résultats par école sont les suivants :

- HEC (2.154 candidats) – moyenne : 10,71 ; écart-type : 4,20.
- ESCP-EAP (2.569 candidats) – moyenne : 10,08 ; écart-type : 4,36.

Commentaires

La partie 1 est abordée par tous les candidats. Le cours est presque toujours connu, mais les calculs posent des difficultés à nombre de candidats (notamment, la résolution d'un système 2×2).

La partie 2 s'est révélée nettement plus sélective que la partie précédente. En particulier, la reconnaissance des « objets » mathématiques (scalaires, matrices rectangulaires ou carrées) a opéré une première discrimination entre les candidats et la question 2b n'a été traitée que par un tiers d'entre eux.

Enfin, la partie 3 est abordée par nombre de candidats, y compris ceux qui ont abandonné la partie 2. Mais d'une façon générale, les réponses sont trop rapides, trop peu argumentées et conduisent à des erreurs fondamentales et /ou de calcul, ou bien à un grappillage de points dans le meilleur des cas.