EXERCICE 1

On considère une matrice symétrique H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $H^2 = H$.
Pour tout réel a, on note alors $M(a) = aI + (1-a)H$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. (a) Justifier que pour tout réel a, $M(a)$ est une matrice symétrique et diagonalisable.

   (b) Montrer que pour tous réels a et b, $M(a)M(b) = M(ab)$.

2. Soit a un réel strictement positif.

   (a) Montrer que $M(a)$ est inversible et que $M(\frac{1}{a})$ est son inverse.

   (b) Justifier que $M(a) = {}^t(M(\sqrt{a}))\,M(\sqrt{a})$.

On suppose que X désigne une matrice colonne propre de $M(a)$ associée à la valeur propre λ.

   (c) Montrer que ${}^t(M(\sqrt{a})\,X)\,(M(\sqrt{a})\,X) = \lambda\,{}^tX\,X$ puis justifier que $\lambda > 0$.

   (d) En déduire que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} M(a) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

3. Application : On considère le cas où $a = 4$ et $H = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que $H^2 = H$ (on détaillera les calculs) et expliciter la matrice $M(4)$.

   (b) On note la famille $\mathcal{B} = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right]$.

   On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la famille $\mathcal{B}$.

   Calculer ${}^tP\,P$. Que peut-on en déduire concernant la famille $\mathcal{B}$?

   Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale pour le produit scalaire φ.

EXERCICE 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.

On définit sur E l'application φ, qui, à toute fonction f de E associe la fonction $\varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par les relations suivantes :

$$(\varphi(f))(0) = f(0)$$
$$\text{si } x > 0, \quad (\varphi(f))(x) = \frac{6}{x^6}\int_0^x t^5 f(t)\,dt.$$

1. Soit $\alpha \geq 0$. On note pour tout $x \geq 0$: $h_\alpha(x) = x^\alpha$. Expliciter $\varphi(h_\alpha)$.

2. Soit f un vecteur quelconque de E .

(a) Montrer que pour tout $x > 0$: $\left(\min_{[0;x]} f\right) \frac{x^6}{6} \leq \int_0^x t^5 f(t)\,dt \leq \left(\max_{[0;x]} f\right) \frac{x^6}{6}$.

(b) Justifier que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\min_{[0;x]} f\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\max_{[0;x]} f\right) = f(0)$ et que $\varphi(f)$ est continue en 0 à droite .

(c) Justifier que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $I\!R^{+*}$ et montrer que pour tout $x > 0$:

$$(\varphi(f))'(x) = \frac{6}{x}\left(f(x) - (\varphi(f))(x) \right) .$$

3. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E .

(b) Justifier que $Ker(\varphi)$ ne contient que la fonction nulle .

(c) Que peut-on dire de la fonction h_α , définie en question 1 , relativement à φ ?

4. Soient λ un réel non nul et g une fonction non nulle de E tels que $\varphi(g) = \lambda\, g$.

(a) Montrer que g est de classe C^1 sur $I\!R^{+*}$ et que pour tout $x > 0$:

$$\frac{6(1-\lambda)}{\lambda}\, g(x) = x\, g'(x) .$$

(b) On note pour $x > 0$: $u(x) = x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}}\, g(x)$.

Vérifier que u est de dérivée nulle sur $I\!R^{+*}$.

En déduire que pour tout $x > 0$, $g(x) = g(1)\,.\,x^{\frac{6(1-\lambda)}{\lambda}}$.

En utilisant la continuité de g en 0 à droite , montrer que $\lambda \in \,]\,0\,;1\,]$.

5. Application : Déterminer $Ker\left(\varphi - \frac{1}{3}\, id_E\right)$ et $Ker\left(\varphi - 2\, id_E\right)$.

EXERCICE 3

On considère le programme suivant , où l'on rappelle que **random** est une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[\,0\,;1\,]$, dont les exécutions successives donnent des variables indépendantes .

```
program simulations ;
var  U , V , X , Y , Z  :  real ;
begin
randomize ;
U : = random ; V : = random ;
X : =  -  ln ( U ) ; Y : = - ln ( V ) ;
Z : = X + Y ;
end .
```

1. Montrer que $X(\Omega) = I\!R^{+}$ et que la variable X suit une loi exponentielle de paramètre 1 .
(On considérera que , du fait que $U = 0$ est de probabilité nulle , $U(\Omega) = \,]\,0\,;1\,]$).

2. (a) Quelle est la loi de Y ? Justifier que X et Y sont indépendantes .

(b) Déterminer une densité f de Z . Vérifier que si $x \geq 0$, $f(x) = x\, e^{-x}$.

(c) Déterminer la fonction de répartition de Z .

3. (a) On note $T = e^{Z}$.
Déterminer la fonction de répartition de T et montrer que T est une variable à densité .

(b) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(t) = 0 & \text{si } t < 1 \\ h(t) = \dfrac{\ln t}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

est une densité de la variable aléatoire $\dfrac{1}{UV}$.

EXERCICE 4

On examine dans cet exercice deux méthodes différentes pour tester la contamination par une bactérie de 400 bouteilles de lait choisies au hasard sur le territoire .
Dans tout l'exercice , θ est un réel fixé , élément de l'intervalle $[\,0\,;\frac{1}{10}\,]$.
On suppose que pour chaque bouteille , la probabilité de contamination est égale au réel θ .

On dispose d'un test permettant de manière infaillible de savoir si l'échantillon de lait qu'on lui soumet est contaminé ou non (quel que soit le volume de cet échantillon) .

1. Dans cette question on adopte une méthode simple consistant à tester une par une chaque bouteille .

   On note X_k la variable de Bernoulli valant 1 si la k- ième bouteille testée est contaminée et 0 si la k- ième bouteille testée est saine .

On supposera dans tout l'exercice que les variables $(X_k)_{1 \leq k \leq 400}$ sont mutuellement indépendantes.

(a) Justifier que la variable $Z = \frac{1}{400}\sum_{k=1}^{400} X_k$ est un estimateur sans biais de θ .

(b) Déterminer la variance $V(Z)$ et justifier que $V(Z) \leq \dfrac{1}{4000}$.

(c) Montrer que $P(\,|\,Z - \theta\,| \geq 0{,}05\,) \leq 0{,}1$.
Que peut-on en déduire sur l'intervalle de confiance $[\,Z - 0{,}05\,;\,Z + 0{,}05\,]$? (Justifier) .

2. Dans cette question on examine une méthode moins directe :
   Les 400 bouteilles sont regroupées en 40 lots de 10 bouteilles .
   On remplit alors 40 jerrycans $(\,J_n\,)_{1 \leq n \leq 40}$ en versant dans chacun la quasi-totalité des 10 bouteilles d'un lot . (on garde dans chaque bouteille un peu de lait pour un futur deuxième examen éventuel) .

   On teste ensuite chacun des 40 jerrycans :
   Si un jerrycan est contaminé , on teste une à une les 10 bouteilles incriminées .
   Si un jerrycan n'est pas contaminé , on considère les 10 bouteilles dont il est rempli comme saines .

   On note Y_n la variable de Bernoulli valant 1 si le n- ième jerrycan est contaminé et 0 sinon .
   Enfin on note T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans cette méthode .

(a) Montrer que pour tout entier n de $\{\,1,\ldots,40\,\}$, $E(Y_n) = 1 - (1-\theta)^{10}$.

(b) Justifier que $T = 40 + 10\,Y_1 + 10\,Y_2 + \ldots + 10\,Y_{40}$ et que $E(T) = 440 - 400\,(1-\theta)^{10}$.

(c) En déduire que cette méthode est préférable à la première si et seulement si
$\theta \leq 1 - e^{-\frac{\ln 10}{10}}$. Est-ce le cas ici ? (On donne $e^{-\frac{\ln 10}{10}} \approx 0{,}79$) .