

EXERCICE 1

On considère les matrices A, B, D, P, E de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.
 - (a) Calculer les valeurs propres de la matrice A ainsi qu'une base de chacun de ses sous-espaces propres.
 - (b) En déduire que P est inversible et justifier la relation $A = P D P^{-1}$.
 - (c) Calculer la matrice P^{-1} par méthode du pivot. Vérifier que $P^{-1} B P = E$.
2. Soit Φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $\Phi(M) = A M - M B$.
 - (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - (b) On définit l'ensemble $K = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } A M = M B \}$. Justifier que K est le noyau de Φ .
 - (c) Montrer que : $M \in K \Leftrightarrow D(P^{-1} M P) = (P^{-1} M P) E$.
 - (d) Montrer que l'équation $D X = X E$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, a pour ensemble solution l'espace vectoriel $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.
 - (e) En déduire que $K = \text{Vect}(A)$.
 - (f) Citer le théorème du rang pour l'application Φ . Quelle est la dimension de $\text{Im}(\Phi)$?

EXERCICE 2

1.
 - (a) Etudier les variations de la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^4 - 4x + 1$. (On précisera les limites aux bornes).
 - (b) En déduire que l'équation (E) : $x^4 - 4x + 1 = 0$ d'inconnue le réel x , admet exactement deux solutions réelles α et β (en notant α la plus petite).
 - (c) Justifier que $\alpha \in [0; \frac{1}{2}]$.

2. On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par : $g(x) = \frac{x^4 + 1}{4}$.

On définit alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation, valable

pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{(u_n)^4 + 1}{4}$.

- (a) Etudier les variations de g (On précisera les valeurs aux bornes).
- (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
- (c) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ puis justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
- (d) Ecrire un programme en Pascal qui demande un entier n puis qui calcule et affiche la valeur de u_n .

3. Soit la fonction de deux variables $f :]0, 1[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \frac{x^5}{5} - 2x^2 + 4xy - 4xy^2 .$$

- (a) Calculer les dérivées partielles premières de f .
- (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = (\alpha, \frac{1}{2})$, où α désigne le réel déterminé en question 1. (b) .
- (c) Calculer les dérivées partielles secondes de f .
- (d) Montrer que f présente un maximum local au point $A = (\alpha, \frac{1}{2})$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul .

On dispose d'une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0; 1[$ et de $(n + 1)$ urnes numérotées de 0 à n . L'urne $n^\circ k$ contient k boules vertes et $(n - k)$ boules rouges.

On considère l'expérience \mathcal{E} suivante : on lance n fois la pièce puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où "pile" a été obtenu .

(Par exemple si on a obtenu quatre "piles" au cours de ces n lancers , on pioche dans l'urne $n^\circ 4$).

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenues lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.
Donner l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.
- (b) En utilisant la formule de Koenig-Huygens, calculer la valeur de $E(X^2)$.
2. (a) Calculer $P_{X=0}(Y = 0)$ et $P_{X=n}(Y = 0)$. X et Y sont-elles indépendantes ?
- (b) Justifier que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_{X=k}(Y = 1) = \frac{k}{n}$.
- (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(X = k)_{0 \leq k \leq n}$, que :
$$P(Y = 1) = \frac{E(X)}{n}$$
 .
- (d) Déterminer la loi de Y et son espérance.
3. (a) Montrer que $E(XY) = \sum_{k=1}^n kP(X = k \cap Y = 1) = \frac{E(X^2)}{n}$.
- (b) En déduire la covariance du couple (X, Y) .

EXERCICE 4

Soit θ un réel strictement positif .

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par
$$\begin{cases} f(x) = e^{\theta-x} & \text{si } x \geq \theta \\ f(x) = 0 & \text{si } x < \theta \end{cases} .$$

- (a) Vérifier que pour tout réel $A \geq \theta$, $\int_{\theta}^A f(x) dx = 1 - e^{\theta-A}$.
(b) Montrer que f est une densité .

On note X une variable aléatoire réelle de densité f .

2. Déterminer la fonction de répartition de X .

3. On considère la variable aléatoire $Y = X - \theta$.

- (a) Montrer que la fonction de répartition F_Y de Y est définie par :

$$\begin{cases} F_Y(y) = 1 - e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \\ F_Y(y) = 0 & \text{si } y < 0 \end{cases} .$$

- (b) En déduire que Y est une variable à densité qui suit une loi classique dont on précisera le paramètre. Préciser son espérance et sa variance.
(c) En déduire l'espérance et la variance de X .

4. Dans toute la suite n désigne un entier naturel non nul et X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X .

On cherche à estimer le réel θ à l'aide de la variable aléatoire $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - 1)$.

- (a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de θ .
(b) Calculer son risque quadratique noté $r(S_n)$.