EXERCICE 1

On note $\mathcal{BC}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on définit les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P_y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{BC}$.
On note id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice I dans la base canonique $\mathcal{BC}$.

1. (a) Calculer $(A - 2I)^2$ puis vérifier que $(A - 2I)^3 = O_3$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).
   (b) En déduire que le réel 2 est l'unique valeur propre de A et déterminer une base et la dimension du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2.

2. Montrer par une méthode du pivot que P_y est inversible si et seulement si $y \neq -1$.

3. On note dans toute la suite les vecteurs : $u_1 = (0,4,4)$ et $u_2 = (2,0,2)$.
   (a) Déterminer l'unique vecteur u_3 de la forme $u_3 = (1, y, 0)$ tel que : $f(u_3) = u_2 + 2u_3$.
   (b) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{BC}$ à la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.
   Montrer à l'aide de la question 2 que P est inversible puis justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Exprimer $f(u_1)$ en fonction de u_1, puis $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2.
   En déduire que la matrice T de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$ est $T = 2I + N$.
   Donner, en la justifiant en une seule ligne, la relation liant les matrices A, T, P et P^{-1}.

On cherche maintenant à déterminer l'ensemble S des endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation **[R]** :

$$\textbf{[R]} \; : \; f \circ h = h \circ f$$

4. (a) On note M' la matrice de l'endomorphisme h relativement à la base $\mathcal{B}'$.
   Montrer que : **[R]** $\Leftrightarrow (NM' = M'N)$.
   (b) En posant $M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$, montrer que : **[R]** $\Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & a & a' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
   (c) Calculer la matrice N^2 et en déduire que $S = Vect\,(\, id\,,\, f - 2id\,,\, (f - 2id)^2\,)$.
   (d) On note $\mathcal{G} = (I, N, N^2)$. Montrer que $\mathcal{G}$ est libre et en déduire la dimension de S.
   On note $\mathcal{F}' = (id, f, f^2)$. Montrer que $\mathcal{F}'$ est une base de S.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel non nul . On considère dans cet exercice une variable aléatoire X_n qui suit la loi normale de paramètres $m = 0$ et $\sigma^2 = \frac{1}{n}$. (loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$) .

1. (a) Justifier que la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-\left(\frac{n}{2}t^2\right)}$ est une densité de X_n.

   (b) Justifier que f_n est paire .

   (c) Dans cette question uniquement on considère que $n = 4$, et on donne $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0{,}8$.

   Représenter l'allure de la courbe représentative de f_4 dans un repère orthonormé et situer les points d'inflexion de cette courbe en donnant leur abscisse (leur ordonnée vaut environ 0,5) .

   (d) Justifier graphiquement l'égalité : $P(X_n \leq 0) = P(X_n \geq 0) = \frac{1}{2}$.

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite , définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt .$$

On donne en outre la valeur approchée $\Phi(1) \approx 0{,}8$.

2. (a) Justifier que $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$.

   (b) En déduire que Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi'(x) = f_1(x)$.

   (c) Justifier que la variable $\sqrt{n}\, X_n$ suit la loi normale centrée réduite .

   En déduire : $P(0 \leq X_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}) \approx 0{,}3$.

On note dans toute la suite H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} H(x) = e^{-\frac{1}{x}}\,\Phi(x) & \text{si } x \neq 0 \\ H(0) = 0 \end{cases}$

3. (a) Etablir les résultats suivants :
   $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} H(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} H(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} H(x) = 0$.

   (b) Justifier que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et que H est continue à droite en 0 .

   (c) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $H'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,\Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x^2}$.

   Justifier $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

   En déduire que H est dérivable à droite en 0 et que $H'_d(0) = 0$.

   (d) Etudier les variations de H et tracer l'allure de la courbe de H dans un repère orthonormé .

   (On fera apparaître les caractéristiques étudiées , et on utilisera $H(1) \approx 0{,}3$)

EXERCICE 3

Les parties A et B sont indépendantes .

Un joueur A dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Un joueur B dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité $p \in]0;1[$.

Les résultats des lancers de ces pièces seront toujours supposés indépendants .

PARTIE A

Dans cette partie on effectue le jeu suivant :

Les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'au moins une des deux pièces donne PILE .

Si A et B font PILE simultanément , le jeu s'arrête sans que personne n'ait gagné d'argent .

Sinon , le premier à obtenir PILE s'arrête et l'autre continue ses lancers jusqu'à obtenir PILE également et paye un euro à son adversaire à chacun des lancers de cette série " en solitaire " .

Par exemple si A a obtenu PILE pour la première fois à son 7° lancer et si B a obtenu PILE pour la première fois à son 11° lancer , c'est B qui doit payer à A la somme de 4 euros .

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers effectués par le joueur A , Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers effectués par le joueur B et $Z = Y - X$.

1. Justifier que les variables X et Y suivent des lois géométriques dont on donnera le paramètre .
   Préciser $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et les valeurs de $P(X = k)$, $P(Y = k)$, $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$.

2. (a) Montrer que $E(Z) = \dfrac{1 - 3p}{p}$ et $V(Z) = \dfrac{6p^2 - p + 1}{p^2}$.

   (b) Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \dfrac{p}{1 + 2p}$ et en déduire $P(Z = 0)$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(Z = n) = \dfrac{p}{1 + 2p}(1 - p)^n$ et en déduire $P(Z > 0)$.
   En déduire $P(Z < 0)$ puis interpréter les événements $(Z = 0)$, $(Z > 0)$, $(Z < 0)$.

PARTIE B

On veut d'abord programmer en Turbo-Pascal le lancer simultané des deux pièces par les joueurs A et B .

1. En utilisant la fonction **random** , recopier et compléter la fonction suivante pour qu'elle simule ce lancer simultané et renvoie 0 si les résultats de A et B sont identiques et 1 s'ils sont différents .

```
function lancer ( p : real ) : integer ;
var A , B : char ;
begin
    if ( ........................... ) then A := 'P'  else A := 'F' ;
    if ( ........................... ) then B := 'P'  else B := 'F' ;
    if ( ........................... ) then lancer := 0  else lancer := 1 ;
end ;
```

2. Montrer que la probabilité que les lancers de A et B soient différents est $\dfrac{1 + p}{3}$.

On procède alors au jeu suivant : (N est un entier naturel fixé non nul).

Les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément N fois de suite .

Le joueur B paye un euro à A à chaque fois que les pièces n'affichent pas le même résultat .

On note H_N la variable aléatoire égale à la somme payée par le joueur B au joueur A .

3. Justifier que H_N suit une loi classique que l'on détaillera .

4. Montrer que $\left(\dfrac{3H_N}{N} - 1\right)$ est un estimateur sans biais du réel p et déterminer son risque quadratique .