BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 296

Conception : emlyon business school

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 27 avril 2021, de 14h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty\,;1]$ par :

$$\forall x \in]-\infty\,;1], \qquad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

PARTIE A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty\,;1]$.

2. a. Justifier que φ est de classe C^1 sur $]-\infty\,;1[$ et calculer, pour tout x de $]-\infty\,;1[$, $\varphi'(x)$.

   b. En déduire les variations de φ sur $]-\infty\,;1]$.

   c. La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et de 1.

5. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,dt$ converge et calculer sa valeur.

   b. En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{4}$.

PARTIE B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0\,;1[$.

6. **a.** Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0\,;x]$: $\quad \dfrac{1}{1-t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \dfrac{t^n}{1-t}$.

b. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad -\ln(1-x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} = \int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

7. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(1-x)}$.

En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\,dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

8. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

9. **a.** Déterminer deux réels a et b tels que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.

10. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

PARTIE C : Application en probabilité

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;
- si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

11. **a.** Montrer soigneusement : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \mathbf{P}(N=n) = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

b. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

12. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Scilab suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```
function N = simuleN()
    b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rand() < ......
        b = b+1
    end
    N = ......
endfunction
```

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ et N sont mutuellement indépendantes.

On note F la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_n, pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$, ce qui signifie :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \max\big(X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)\big).$$

Ainsi par exemple, si N prend la valeur 3, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3)$; si N prend la valeur 5, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$; etc.

13. a. Montrer : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \ \mathbf{P}_{[N=n]}(T \leqslant x) = \big(F(x)\big)^n$.

b. En déduire : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \mathbf{P}(T \leqslant x) = \varphi\big(F(x)\big)$.

14. On suppose **dans cette question uniquement** que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[0\,;1]$.

a. On rappelle que l'instruction `grand(n,p,'unf',0,1)` renvoie une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où les coefficients sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0\,;1]$.

Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function T = simuleT()` qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T.

b. On considère la fonction Scilab suivante :

```
function m = mystere()
    m = zeros(1,3)
    for k = 1 : 3
        s = zeros(1,1000)
        for j = 1 : 1000
            s(j) = simuleT()
        end
        m(k) = mean(s)
    end
endfunction
```

À son appel, on obtient :

```
ans =

      0.7474646    0.7577248    0.7470916
```

Que renvoie la fonction `mystere` ? Que peut-on conjecturer sur la variable aléatoire T ?

c. Montrer : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \mathbf{P}(T \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$

d. En déduire que T est une variable aléatoire à densité.

e. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que T admet une espérance et calculer $\mathbf{E}(T)$.

15. On suppose **dans cette question uniquement** que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

a. Rappeler une expression de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

b. En déduire une expression de la fonction de répartition de T.

c. Montrer que T est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de T est la fonction

$$g : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2 x \,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

d. Justifier que T admet une espérance et que l'on a : $\mathbf{E}(T) = \lambda \, \mathbf{E}(X_1^2)$.
En déduire la valeur de $\mathbf{E}(T)$.

PROBLÈME 2

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice $M(a, b, c)$ par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}.$$

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on appelle cardinal de l'ensemble $\{a, b, c\}$, noté $\mathrm{Card}(\{a, b, c\})$, le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.
Par exemple, si $a = b = c$, alors $\mathrm{Card}(\{a, b, c\}) = 1$; si $a = b$ et $a \neq c$, alors $\mathrm{Card}(\{a, b, c\}) = 2$.

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on s'intéresse dans ce problème au nombre de valeurs propres distinctes de la matrice $M(a, b, c)$ et on souhaite démontrer la propriété $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad M(a,b,c) \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad ab + bc + ac + abc \neq 0.$$

PARTIE A : Généralités

1. Justifier que, pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

a. Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ ne peut pas admettre une unique valeur propre.
On pourra par exemple raisonner par l'absurde.

b. En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet soit deux soit trois valeurs propres distinctes.

3. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $M(a, b, c)$.

a. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}' = (e_2, e_1, e_3)$.

b. En déduire que les matrices $M(a, b, c)$ et $M(b, a, c)$ ont les mêmes valeurs propres.

c. De la même façon, montrer que les matrices $M(a, b, c)$ et $M(a, c, b)$ ont les mêmes valeurs propres.
Ces deux derniers résultats permettent de justifier que les valeurs propres de la matrice $M(a, b, c)$ ne dépendent pas de l'ordre des réels du triplet (a, b, c).

PARTIE B : Cas où Card$(\{a, b, c\}) = 1$

4. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = c = 0$ et on note $J = M(0, 0, 0)$.

a. Calculer J^2. Déterminer alors un polynôme annulateur de J.

b. En déduire les valeurs propres de J et préciser une base des sous-espaces propres de J.

c. Déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $J = P\,D\,P^{-1}$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. Vérifier : $M(a, a, a) = P\left(aI_3 + D\right)P^{-1}$.

b. En déduire que la matrice $M(a, a, a)$ admet exactement deux valeurs propres distinctes et les déterminer en fonction de a.

c. Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a, a, a)$.

PARTIE C : Cas où Card$(\{a, b, c\}) = 2$

6. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = 0$ et que $c \in \mathbb{R}^*$.
On note $C = M(0, 0, c)$.

a. Justifier que 0 est une valeur propre de C.

b. Soit λ un réel non nul.

i. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence :

$$C\,X = \lambda\,X \iff \begin{cases} y = x \\ z = (\lambda - 2)\,x \\ (\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c)\,x = 0. \end{cases}$$

ii. En déduire : λ est une valeur propre de $C \iff \lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c = 0$.

c. Montrer alors que C admet trois valeurs propres distinctes.

7. Soit $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq c$.

a. Exprimer $M(a, a, c)$ comme une combinaison linéaire de I_3 et de $M(0, 0, c - a)$.

b. En déduire que la matrice $M(a, a, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

c. Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a, a, c)$.

8. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que Card$(\{a, b, c\}) = 2$.
À l'aide de la conclusion de la question **3.**, montrer que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes et vérifier la propriété $(*)$ dans ce cas.

PARTIE D : Cas où $\mathrm{Card}(\{a, b, c\}) = 3$

9. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$.

On note g la fonction définie sur l'ensemble $D = \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}$ par :

$$\forall x \in D, \quad g(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}.$$

a. Dresser le tableau de variations de g sur D en y précisant les limites en $+\infty$, en $-\infty$, ainsi qu'à gauche et à droite de a, de b et de c.

b. En déduire que l'équation $g(x) = 1$, d'inconnue $x \in D$, admet exactement trois solutions distinctes λ_1, λ_2, λ_3, vérifiant : $\quad a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3$.

c. Soit $\lambda \in D$ une solution de l'équation $g(x) = 1$.

On note X_λ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par : $\quad X_\lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda - a} \\ \dfrac{1}{\lambda - b} \\ \dfrac{1}{\lambda - c} \end{pmatrix}$.

Montrer que X_λ est un vecteur propre de la matrice $M(a, b, c)$ associé à la valeur propre λ.

d. En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

10. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Card}(\{a, b, c\}) = 3$.

a. Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

b. Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a, b, c)$.

11. On pose : $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que la matrice A est inversible.

b. On note α la plus grande valeur propre de A.

i. Montrer : $\quad 4 < \alpha < 5$.

ii. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Scilab ci-dessous afin qu'elle renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide de la méthode de dichotomie.

```
function alpha = valeur_approchee()
    x = 4
    y = 5
    while ......
        m = (x+y)/2
        if 1/m + 1/(m-1) + 1/(m-2) ...... then
            ......
        else
            ......
        end
    alpha = (x+y)/2
    end
endfunction
```

• FIN •