BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 296

Conception : emlyon business school

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 27 avril 2020, de 14h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $]0\,;1[$ par :

$$\forall x \in]0\,;1[,\quad f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$

PARTIE A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0\,;1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0\,;1[,\quad f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,\big(\ln(x)\big)^2}\big(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)\big).$$

2. **a.** Justifier : $\forall t \in]0\,;1[,\quad t\ln(t) < 0$.

   b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;1[$.

3. **a.** Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

   b. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

PARTIE B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $\quad x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x \longmapsto x^n + x - 1$.
   En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$ que l'on note u_n.

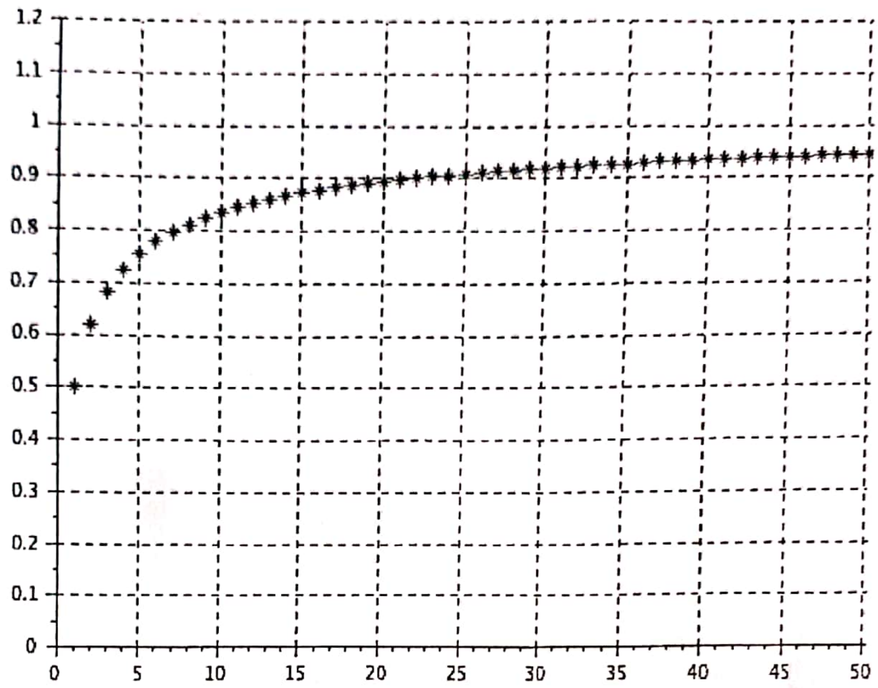
7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0\,;1[$.

8. Déterminer u_1 et u_2.

9. **a.** Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = valeur_approchee(n)
    a = 0
    b = 1
    while ...
        c = (a+b)/2
        if (c^n+c-1)>0 then
            ...
        else
            ...
        end
    u = ...
    end
endfunction
```

b. On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. a. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad f(u_n) = n$.

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

PARTIE C : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction F de classe C^2 sur l'ouvert $]0\,;+\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0\,;+\infty[^2, \quad F(x,y) = x^2y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x.$$

11. a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x,y) de $]0\,;+\infty[^2$.

b. Montrer que la fonction F admet $\left(u_3, u_3^2\right)$ comme unique point critique,
où le réel u_3 est l'unique solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation (E_3) définie dans la partie B.

12. a. Écrire la matrice hessienne, notée H, de la fonction F au point $\left(u_3, u_3^2\right)$.

b. Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\lambda_1 \lambda_2 = -6\,u_3^2 - 2.$$

13. La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0\,;+\infty[^2$?

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix},$$

et on note : $\quad E = \{M(a,b)\,;(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. **a.** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une base de E et sa dimension.

b. Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

2. **Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.**
Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

3. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.**
Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.

a. Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.

b. En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

c. En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $\quad A = P\,D\,P^{-1}$.

4. **Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.**
Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.

a. Déterminer le rang des matrices B et $B - bI_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.

b. En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.

c. La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.**
Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a,b)$.

On pose : $\quad v_1 = (1,1,1,0), \quad v_2 = (0,0,0,1) \quad$ et $\quad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f)$.

b. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

c. Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$.

d. Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Montrer : X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à la valeur propre } \lambda \\ \text{et} \\ z = t = 0. \end{array} \right.$$

e. On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$.
Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1, 1)$ est diagonalisable.

f. On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1, -1)$ est-elle diagonalisable ?

g. Montrer l'équivalence :

$$M(a, b) \text{ est diagonalisable} \iff a^2 + 10ab + b^2 > 0.$$

EXERCICE 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

PARTIE A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < b, \\ a \dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b. \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. a. Soit U un variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;1[$.
Montrer que la variable aléatoire $b\,U^{-1/a}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b.

b. En déduire une fonction Scilab d'en-tête `function X = pareto(a,b)` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

c. On considère la fonction Scilab ci-dessous.
Que contient la liste L renvoyée par la fonction mystere ?

```
function L = mystere(a,b)
    L = []
    for p = 2 : 6
        S = 0
        for k = 1 : 10^p
            S = S + pareto(a,b)
        end
        L = [L, S/10^p]
    end
endfunction
```

d. On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b.
Comment interpréter les résultats obtenus ?

```
--> mystere(2,1)
 ans  =
   1.9306917  1.9411352  1.9840089  1.9977684  2.0012415

--> mystere(3,2)
 ans  =
   3.1050951  3.0142956  2.9849407  2.9931656  2.9991517

--> mystere(1,4)
 ans  =
   21.053151  249.58609  51.230522  137.64549   40.243918
```

4. **a.** Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas,
$$\mathrm{E}(X) = \frac{a\,b}{a-1}.$$

b. Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas,
$$\mathrm{V}(X) = \frac{a\,b^2}{(a-1)^2(a-2)}.$$

PARTIE B : Estimation du paramètre b

On suppose **dans cette partie uniquement** que $a = 3$ et on cherche à déterminer un estimateur performant de b.

Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b, \\ \dfrac{3\,b^3}{x^4} & \text{si } x \geqslant b. \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

On définit : $\quad Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n) \quad$ et $\quad Z_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.
On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

5. a. Calculer, pour tout x de $[b\,;+\infty[$, $\mathbf{P}\big([Y_n > x]\big)$.

   b. En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

   c. Montrer que $Y'_n = \dfrac{3n-1}{3n} Y_n$ est un estimateur sans biais de b.
   Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

6. a. Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

   b. En déduire un estimateur noté Z'_n sans biais de b de la forme $\alpha\, Z_n$ où α est un réel à préciser.
   Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

7. Entre Y'_n et Z'_n, quel estimateur choisir ? Justifier.

PARTIE C : Estimation du paramètre a

On suppose **dans cette partie uniquement** que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a.

Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\quad W_n = \ln(X_n)$.
   Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   En déduire l'espérance et la variance de W_n.

9. On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad M_n = \dfrac{\ln(X_1) + \cdots + \ln(X_n)}{n} \quad$ et $\quad T_n = \sqrt{n}\big(a\, M_n - 1\big)$.

   a. Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

   b. En déduire que l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\, M_n}\,;\,\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\, M_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.
   On admettra que $\Phi(2) \geqslant 0{,}975$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

• FIN •