BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 295

Conception : EMLYON Business School

1ère épreuve (OPTION SCIENTIFIQUE)

MATHÉMATIQUES

mardi 26 avril 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLEME 1

PARTIE I : Étude d'un exemple

On considère, dans cette partie, les matrices de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver, en fonction de I_3 et de A, deux matrices P_1 et P_2 de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$P_1 + P_2 = I_3 \qquad \text{et} \qquad 4P_1 + 9P_2 = A.$$

Expliciter ensuite les coefficients de P_1 et ceux de P_2.

2. **a.** Calculer les matrices P_1^2, P_1P_2, P_2P_1 et P_2^2.

b. En déduire : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$.

3. Trouver au moins une matrice B de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$.

4. Quelles sont les valeurs propres de A ?

Dans toute la suite du problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1 et f un endomorphisme de E.

On note e l'endomorphisme identité de E qui, à chaque élément de E, associe lui-même, et $\widetilde{0}$ l'endomorphisme nul de E qui, à chaque élément de E, associe l'élément nul de E.

On suppose qu'il existe un entier m de $\mathbb{N}^*$, des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ deux à deux distincts et des endomorphismes $p_1, \dots, p_m$ de E tous différents de $\widetilde{0}$, tels que : $\quad \forall k \in [\![0\,;m]\!],\ \ f^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k\, p_i$.

Tournez la page S.V.P.

Enfin, on considère les polynômes :

$$N = \prod_{\ell=1}^{m}(\mathrm{X} - \lambda_\ell), \qquad \text{et pour tout } i \text{ de } [\![1\,;m]\!], \quad M_i = \prod_{\substack{1\leqslant \ell \leqslant m \\ \ell \neq i}} (\mathrm{X} - \lambda_\ell) \quad \text{et} \quad L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i.$$

On admet que, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$: $\quad (P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

PARTIE II : Étude des puissances de f

5. Montrer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$: $\quad P(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)\, p_i$.

6. En déduire : $\quad N(f) = \widetilde{0}$.

7. **a.** Montrer que, pour tout couple (i,j) de $[\![1\,;m]\!]^2$, $L_i(\lambda_j)$ est égal à 1 si $i=j$ et égal à 0 si $i \neq j$.

b. En déduire, pour tout i de $[\![1\,;m]\!]$: $\quad L_i(f) = p_i$.

8. **a.** Montrer : $\quad e = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$.

b. En déduire que E est la somme des m sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(p_1), \ldots, \mathrm{Im}(p_m)$.

9. Soit i appartenant à $[\![1\,;m]\!]$.

a. Vérifier : $\quad N = M_i(\lambda_i)\,(\mathrm{X} - \lambda_i)\, L_i$.

b. En déduire, en utilisant le résultat de la question **6.** : $\quad \mathrm{Im}(p_i) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_i\, e)$.

10. Déduire des questions précédentes que f est diagonalisable, que les valeurs propres de f sont les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ et que, pour tout i de $[\![1\,;m]\!]$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i est $\mathrm{Im}(p_i)$.

11. **a.** Montrer, pour tout couple (i,j) de $[\![1\,;m]\!]^2$ tel $i \neq j$: $\quad p_i \circ p_j = \widetilde{0}$.

b. En déduire, en utilisant le résultat de la question **8.a.**, pour tout i de $[\![1\,;m]\!]$: $\quad p_i \circ p_i = p_i$.

c. Établir, pour tout i de $[\![1\,;m]\!]$: $\quad p_i \circ f = \lambda_i\, p_i$.

12. Montrer : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ f^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k\, p_i, \quad$ puis, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$: $\quad P(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)\, p_i$.

PARTIE III : Intervention de produits scalaires

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E d'un produit scalaire $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$.

On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x,y) \in E \times E$, par :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \langle\, p_i(x)\,,\, p_i(y)\,\rangle.$$

13. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

On remarquera qu'ainsi E est muni de deux produits scalaires, $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ et φ.

14. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ.
Quel résultat de la **partie II** peut-on alors retrouver sans calcul ?

15. Démontrer que, pour tout i de $[\![1\,;m]\!]$, p_i est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p_i)$ pour le produit scalaire φ.

PROBLEME 2

PARTIE I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout x de $\mathbb{R}$, à la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout x de $\mathbb{R}^-$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

2. Soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

- **a.** Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.
- **b.** En déduire : $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*\ /\ \forall n\geqslant n_0,\quad |u_n-S(x)|\leqslant\varepsilon$.
- **c.** Justifier alors que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $\quad S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.
- **d.** Justifier : $\forall p\in\mathbb{N}^*,\quad u_{2p}\leqslant S(x)\leqslant u_{2p+1}\leqslant u_{2p-1}$.
- **e.** En déduire : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |S(x)-u_n|\leqslant\dfrac{1}{(n+1)^x}$.

  On pourra séparer les cas n pair et n impair.
- **f.** En déduire une fonction en Scilab qui, étant donnés deux réels $x>0$ et $\varepsilon>0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

3. Soient $x\in\mathbb{R}^{+*}$ et $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^{k+1}}{k^x}=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(2k-1)^x}-\frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^x}\qquad\text{puis :}\qquad\sum_{k=1}^{2p}\frac{(-1)^{k+1}}{k^x}=\sum_{k=1}^{2p}\frac{1}{k^x}-\frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^x}.$$

4. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

- **a.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question **3.** : $\quad v_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.
- **b.** En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

5. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\quad\forall x\in]0\,;+\infty[,\quad\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On rappelle également l'égalité suivante : $\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\Gamma(n)=(n-1)!$.

6. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>-1$.

On pose, pour tout réel x de $]-1\,;+\infty[$, $I(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.

7. Soit $x\in\,]-1\,;+\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0\,;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\quad t\longmapsto\dfrac{t^x}{1+\mathrm{e}^t}$.

a. Montrer : $\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\forall t\in\mathbb{R}^{+*},\quad g_x(t)=(-1)^n\,g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\,t^x\,\mathrm{e}^{-kt}$.

b. Justifier, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^x\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t$ converge et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty}t^x\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k^{x+1}}\,\Gamma(x+1).$$

c. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$ converge, puis que la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty}g_x(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

d. En déduire la relation : $\quad I(x)=S(x+1)\,\Gamma(x+1)$,
où la fonction S a été définie dans la partie **I**.

8. En utilisant la partie **I.**, déterminer la valeur de $I(1)$.

PARTIE III : Étude d'une variable aléatoire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$.

9. Vérifier que la fonction f est paire.

10. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

11. Déterminer la fonction de répartition de X.

12. a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^n\,f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
En déduire que X admet un moment d'ordre n, que l'on note $m_n(X)$.

b. Justifier : $\quad\forall p\in\mathbb{N},\quad m_{2p+1}(X)=0$.

c. A l'aide d'une intégration par parties, montrer : $\quad\forall p\in\mathbb{N}^*,\quad m_{2p}(X)=4p\,I(2p-1)$.

13. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance et de la variance de X.

14. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes et de même densité f.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad Y_n=\max(X_1,\ldots,X_n)\quad$ et $\quad Z_n=Y_n-\ln(n)$.

a. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de Y_n puis la fonction de répartition de Z_n.

b. En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera une densité.

• FIN •

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1172 – D'après documents fournis