BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code épreuve :

296

Concepteur : EMLYON Business School

1ère épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 2 mai 2011 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

On considère l'application

$$f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)\,\mathrm{e}^{x-1}.$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On note $f\,'$ sa fonction dérivée.
Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, calculer $f\,'(x)$.

2. Établir :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0.$$

3. En déduire :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

4. En déduire le sens de variation de f.

5. Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
Calculer $f(1)$ et $f\,'(1)$.

6. Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative C de f dans un repère du plan.

7. Tracer l'allure de C. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.
Il n'est demandé ni l'étude de la convexité, ni la recherche d'éventuels points d'inflexion.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

2. Établir, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \mathrm{e}^n$.
Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

3. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{20}$.

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

On considère l'application

$$F :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer $F'(x)$, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, à l'aide de $f(x)$.

On considère l'application de classe C^2

$$G :]0\,;+\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto G(x,y) = F(x) + F(y) - 2\,\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}.$$

2. Exprimer les dérivées partielles premières $G'_x(x,y)$ et $G'_y(x,y)$, pour tout $(x,y) \in]0\,;+\infty[^2$, à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$.

3. **a.** Montrer que f est bijective.

b. Établir que, pour tout $(x,y) \in]0\,;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si :

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln x = \mathrm{e}.$$

4. Montrer que l'équation $x + \ln x = \mathrm{e}$, d'inconnue $x \in]0\,;+\infty[$, admet une solution et une seule, que l'on notera α, et montrer que : $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

5. Montrer que G admet un extremum local. Préciser sa nature.

EXERCICE 2

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Détermination d'une racine carrée de A

1. Sans calcul, justifier que A est diagonalisable et non inversible. Déterminer le rang de A.

2. Montrer que 0, 1 et 4 sont les trois valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.

3. En déduire une matrice diagonale D de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. Calculer P^{-1}.

5. Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, telle que $\Delta^2 = D$, et déterminer Δ.

6. On note $R = P\Delta P^{-1}$. Montrer $R^2 = A$ et calculer R.

Partie II : Étude d'endomorphismes

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement A et R.
On note $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ telle que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

1. Déterminer les matrices de f et g dans la base $\mathcal{C}$.

2. **a.** Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$.

b. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.

3. **a.** Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(g)$.

b. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}\,(g)$.

4. Trouver au moins un automorphisme h de $\mathbb{R}^3$ tel que $g = f \circ h$.
On déterminera h par sa matrice H dans la base $\mathcal{C}$, puis on exprimera la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide de H et de P.

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes.

Soit $p \in]0;1[$. On note $q = 1 - p$.

Partie I : Différence de deux variables aléatoires

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. Déterminer la loi de X. Rappeler son espérance et sa variance.

2. Montrer que Z suit une loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.

On note $Y = Z - X$.

3. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer la loi de Y.

4. **a.** Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

b. Calculer la covariance du couple (X, Y).

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. Rappeler la loi de U, son espérance et sa variance.

On considère une variable aléatoire T telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0; +\infty[, \quad \mathrm{P}_{(U=n)}(T > t) = \mathrm{e}^{-nt}$.

2. **a.** Montrer : $\forall t \in [0; +\infty[, \quad \mathrm{P}(T > t) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^{-t}}{1 - q\,\mathrm{e}^{-t}}$.

b. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

c. En déduire que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

3. On note $Z = UT$

a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0; +\infty[, \quad \mathrm{P}_{(U=n)}(Z > z) = \mathrm{e}^{-z}$.

b. En déduire que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0; +\infty[, \quad \mathrm{P}(U = n, Z > z) = \mathrm{P}(U = n)\mathrm{P}(Z > z)$.

★ ★ ★