Code sujet : 295

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : emlyon Business School

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Mercredi 23 avril 2025, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Le sujet est composé de deux problèmes.

On suppose, pour toutes les questions en langage Python, *les bibliothèques usuelles déjà importées sous leur raccourcis habituels.*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```


Tournez la page S.V.P.

Problème 1

Partie 1 - Une suite d'intégrales

On introduit les deux suites réelles $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(J_n)_{n\geqslant 0}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad J_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales I_n et J_n sont bien définies et exprimer J_n en fonction de I_n.
2. Calculer I_0.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
4. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

5. En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

puis donner la valeur de J_n.
6. **Informatique.** Compléter alors la fonction Python ci-dessous pour qu'elle calcule et renvoie la valeur de I_n, où n est en argument.

```
def I(n) :
    i=1
    for k in ........... :
        i = ..............
    return i
```

7. On admet la *formule de Stirling* : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Montrer que $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Partie 2 - Des polynômes orthogonaux

Dans toute cette section, on considère, l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des polynômes et, pour un entier $n \geqslant 2$ fixé, son sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n dont on note $\mathcal{B}_n = (e_0, e_1, .., e_n)$ la base canonique.

8. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

On notera $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$ ce produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

9. Les polynômes de $\mathcal{B}_n$ sont-ils deux à deux orthogonaux pour ce produit scalaire ?

On définit ensuite l'application u sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $u :\ P \mapsto u(P)$ où $u(P)$ est la dérivée de la fonction polynomiale $x \mapsto (1-x^2)P'(x)$. Par abus de notation et pour alléger la présentation, on s'autorisera à écrire

$$u(P) :\ x \mapsto \left((1-x^2)P'(x)\right)'.$$

10. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

11. **a.** Montrer que $u(e_0) = 0$ puis que $u(e_1) = -2e_1$.
b. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Montrer que $u(e_k) = -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}$.
c. Déduire des deux questions précédentes le spectre de u ainsi que la dimension de chaque sous-espace propre.

12. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de u. En déduire l'existence d'une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de u pour lesquels le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1. On notera $\mathcal{L}_n = (L_0, L_1, ..., L_n)$ cette base.

On admet que, quitte à réordonner les termes, la famille de polynômes $(L_0, L_1, ..., L_n)$ ainsi construite est telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(L_0, L_1, ..., L_k)$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[x]$. On pourra utiliser cette observation dans la suite du problème.

13. Soit $m > n$ un entier. Soit $f \in \mathbb{R}_m[x]$ un polynôme.

a. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que

$$\|f - T_n\| = \min_{g \in \mathbb{R}_n[x]} \|f - g\|.$$

Montrer qu'il existe $(c_0, ..., c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k$.

On précisera, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'expression de c_k en fonction de f et de L_k.

b. Montrer que $\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|L_k\|^2$.

14. On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les polynômes $P_k : x \mapsto (x^2 - 1)^k$ et $Q_k = P_k^{(k)}$ (Q_k est ainsi obtenu en dérivant k fois P_k). En particulier, $Q_0 = P_0^{(0)} = P_0$.

a. Montrer que Q_k est un polynôme de degré k et que son coefficient de plus haut degré vaut $\dfrac{(2k)!}{k!}$.
b. Expliciter les polynômes Q_0, Q_1 et Q_2.

c. *i.* Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_1(x)P_k'(x) = 2ke_1(x)P_k(x)$.
ii. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ fixé. En dérivant, à l'aide de la formule de Leibniz, la relation précédente à l'ordre $k+1$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (1 - x^2)Q_k''(x) - 2xQ_k'(x) + k(k+1)Q_k(x) = 0.$$

En déduire que Q_k est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $-k(k+1)$.
iii. Conclure que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $L_k = \dfrac{k!}{(2k)!} Q_k$.

d. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall (f, g) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x], \quad \int_{-1}^{1} f^{(k)}(t)g(t)\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-1-j)}(t)g^{(j)}(t) \right]_{-1}^{1} + (-1)^k \int_{-1}^{1} f(t)g^{(k)}(t)\mathrm{d}t.$$

e. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ fixé.

i. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_k^{(2k)}(x) = (2k)!$.
ii. Montrer par récurrence que, pour tout $\ell \in [\![0, k]\!]$, il existe un polynôme $R_{k,\ell}$ de degré inférieur ou égal à ℓ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_k^{(\ell)}(x) = (x^2 - 1)^{k-\ell} R_{k,\ell}(x).$$

iii. En déduire que, pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, $P_k^{(\ell)}(-1) = P_k^{(\ell)}(1) = 0$ puis, à l'aide des résultats de la **Partie 1**, que

$$\|Q_k\|^2 = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{2k+1}, \quad \text{puis} \quad \|L_k\| = 2^k \sqrt{\frac{2}{2k+1}} \binom{2k}{k}^{-1}.$$

Problème 2

Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
La **Partie 2** peut être traitée indépendamment de la **Partie 1**, excepté pour la Question **20.** qui établit un lien entre un résultat observé à la Question **8.** et une propriété démontrée tout au long de la **Partie 2**.

Partie 1 - Loi de Cauchy

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire de densité f. On dit que X suit la loi de Cauchy. On note F la fonction de répartition de X.

2. Montrer que X n'admet ni espérance, ni variance.

3. Donner, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $F(x)$. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et préciser, pour tout $y \in]0,1[$, l'expression de $F^{-1}(y)$.

4. a. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que $Y = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X.
b. **Informatique.** Déduire de la question précédente l'écriture d'une fonction Python d'en-tête `def cauchy() :` qui renvoie une simulation de X.

On note maintenant $Z = \sqrt{|X|}$. On **admet** que Z est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

5. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et expliciter une densité f_Z de Z.

6. Justifier que Z admet une espérance, mais pas de variance.

7. Le but de cette question est de calculer explicitement $\mathrm{E}(Z)$.

a. Déterminer deux réels α et β tels que

$$\forall x \geqslant 0, \qquad \frac{x^2}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{\alpha x}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\beta x}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

b. Justifier que intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ convergent.

Obtenir, à l'aide d'un changement de variable affine que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

On **admet** qu'on peut obtenir de la même manière : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$.

c. En observant que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\frac{\alpha x}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\beta x}{x^2+\sqrt{2}x+1}=\frac{\alpha}{2}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{\beta}{2}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right),$$

en déduire que $\mathrm{E}(Z)=\sqrt{2}$.

8. **Informatique.** On suppose écrite correctement la fonction de la Question **4.b.** On dispose du programme ci-dessous dont l'exécution produit, après un temps certain, l'affichage ci-après.
Comment interpréter cet affichage ? Quel résultat peut-on conjecturer ? À quel résultat du cours serait-on tenté de faire appel pour démontrer cette conjecture ? Pourquoi ne peut-on pas l'appliquer ? On détaillera le raisonnement.

```
def mystere(eps, n):
    L=np.zeros(1000)
    for k in range(1000):
        ech=np.zeros(n)
        for i in range(n):
            ech[i]=np.sqrt(np.abs(cauchy()))
        if np.abs(np.sum(ech)/n-np.sqrt(2)) <= eps :
            L[k]=1
    return np.sum(L)/1000

M=np.zeros([4,7])
eps=np.array([1, 0.5, 0.1, 0.05])
n=np.array([100, 500, 1000, 1500, 3000, 5000, 50000])
for i in range(4):
    for j in range(7):
        M[i,j]=mystere(eps[i], n[j])

print(M)
```

Affichage Python

```
>>>
[[0.99 1.   0.999 1.   1.   1.   1.  ]
 [0.964 0.995 0.995 0.998 0.999 0.999 1.  ]
 [0.411 0.725 0.846 0.903 0.965 0.988 0.997]
 [0.21 0.428 0.548 0.599 0.742 0.834 0.992]]
```

Partie 2 - Variables indicatrices et une extension de théorème

Soit A un évènement. On appelle *variable aléatoire indicatrice* de l'évènement A la variable aléatoire notée $\mathbb{1}_A$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathbb{1}_A(\omega)=\begin{cases}1, & \text{si } \omega \in A\\ 0, & \text{si } \omega \notin A\end{cases}.$$

9. Reconnaître la loi de $\mathbb{1}_A$. Préciser son espérance et sa variance.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction indicatrice* de I la fonction notée χ_I, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \chi_I(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x \in I\\ 0, & \text{si } x \notin I\end{cases}.$$

Soient X une variable aléatoire réelle de densité g et $s>0$.

Tournez la page S.V.P.

10. a. Justifier que :
$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathbb{1}_{[X>s]}(\omega) = \chi_{]s;+\infty[}(X(\omega)).$$
b. Soit φ_s la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_s(x) = |x|\chi_{]s,+\infty[}(|x|)$.
Tracer la courbe représentative de φ_s.
Donner sans justification les points de discontinuité de φ_s.

On suppose, dans toute la suite, que X admet une espérance, et que celle-ci est nulle. On souligne le fait qu'on **ne suppose pas** que X admet une variance.

On considère alors une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X.

Soit $M > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit les variables
$$Y_k = X_k \cdot \mathbb{1}_{[|X_k|\leqslant M]}, \qquad \text{et} \qquad Z_k = X_k \cdot \mathbb{1}_{[|X_k|>M]}.$$
Les variables aléatoires Y_k et Z_k sont donc définies comme produit de la variable aléatoire X_k avec une variable indicatrice.

On fera observer que les variables aléatoires Y_k et Z_k dépendent de M. Toutefois, pour alléger la rédaction, on a choisi de ne pas faire apparaître cette dépendance dans les notations.

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle relation a-t-on entre X_k, Y_k et Z_k?

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k admet un moment d'ordre 2 et que $\mathrm{E}(Y_k^2) \leqslant M^2$.

13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
a. À l'aide des Questions **10.a.** et **10.b.**, montrer que : $\lim\limits_{M\to+\infty} \mathrm{E}(|Z_k|) = 0$.
b. En déduire que : $\lim\limits_{M\to+\infty} \mathrm{E}(Z_k) = 0$.
c. Obtenir alors que : $\lim\limits_{M\to+\infty} \mathrm{E}(Y_k) = E(X_k) = 0$.

Dans toute la suite, on considère $t > 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés.

14. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$|x+y| > t \Longrightarrow \left(\left[|x| > \frac{t}{2}\right] \text{ ou } \left[|y| > \frac{t}{2}\right]\right)$$

15. On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}, \quad \overline{Y}_n = \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} \quad \text{et} \quad \overline{Z}_n = \frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{n}.$$
Déduire de la question précédente que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}\left(|\overline{X}_n| > t\right) \leqslant \mathrm{P}\left(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) + \mathrm{P}\left(|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\right).$$

16. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{P}\left(|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leqslant \frac{2}{t}\mathrm{E}(|Z_1|)$.
b. Montrer ensuite qu'il existe un réel $M_1 > 0$, tel que, si $M \geqslant M_1$, alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}\left(|\overline{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

17. a. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{E}(\overline{Y}_n^2) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(Y_k^2) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{E}(Y_iY_j)\right).$$

b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{E}(Y_i Y_j) \leqslant n(n-1)\mathrm{E}(Y_1)^2.$$

c. Obtenir ensuite que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{E}(\overline{Y}_n^2) \leqslant \frac{M^2}{n} + \mathrm{E}(Y_1)^2.$$

d. Justifier l'existence d'un réel $M_2 > 0$ tel que, si $M \geqslant M_2$, alors :

$$\mathrm{E}(Y_1)^2 \leqslant \frac{t^2 \varepsilon}{12}.$$

e. Obtenir alors que, si $M \geqslant M_2$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}\left(|\overline{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) \leqslant \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

18. Montrer que, si $M \geqslant \max(M_1, M_2)$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}\left(|\overline{X}_n| > t\right) \leqslant \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

19. Conclure qu'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(|\overline{X}_n| > t\right) = 0.$$

20. Interpréter ce résultat en le comparant à un résultat du cours que l'on citera explicitement. Commenter alors à nouveau le résultat affiché par l'exécution du programme de la Question **8**.