Code sujet : 295

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : emlyon bs

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

Mardi 23 avril 2024, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, pour toutes les questions en langage Python, *les bibliothèques usuelles déjà importées sous leur raccourcis habituels.*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.special as sp
```


Tournez la page S.V.P.

Problème 1

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, on note, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(M)_{i,j}$ le coefficient de M à l'intersection de la i-ème ligne et j-ème colonne. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.

Partie 1 : Racine(s) d'une matrice carrée

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. On cherche à déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ et, si c'est le cas, à décrire l'ensemble des solutions de cette équation, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer que : $AM = MA$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer que A est inversible si et seulement si M est inversible.

3. On considère, dans cette question $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Montrer que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est solution de $M^2 = A$, alors $a = d$ et $b = -c$.

c. Montrer alors que $M^2 = A$ admet deux solutions que l'on explicitera.

4. On considère, dans cette question, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On suppose qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par M dans la base canonique.

a. A est-elle diagonalisable ?

b. Montrer que $M^4 \neq 0$ et que $M^6 = 0$. On note alors $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* : M^p = 0\}$.

c. Montrer qu'il existe un vecteur non nul u de $\mathbb{R}^3$ tel que $(u, f(u), f^2(u), ..., f^{p-1}(u))$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$. (*On pourra commencer par appliquer f^{p-1} à l'équation de liaison.*)

d. Conclure à une contradiction.

5. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = I_n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par M dans la base canonique.

a. Déterminer un polynôme annulateur de M puis les valeurs propres possibles de M.

b. Montrer que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$.

c. En déduire que M est diagonalisable.

d. Conclure que l'ensemble des solutions de l'équation $M^2 = I_n$ est l'ensemble des matrices semblables aux matrices diagonales où tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 ou à -1, c'est à dire l'ensemble des matrices semblables aux matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{où,} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \varepsilon_i \in \{-1;1\}.$$

6. On suppose dans cette question que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, où les réels λ_i vérifient

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n.$$

a. Justifier qu'il existe une matrice D diagonale (que l'on précisera) et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. Montrer que $M^2 = A$ si et seulement si $N^2 = D$.

c. À l'aide de la Question **1.**, montrer que N est une matrice diagonale.

d. L'équation $M^2 = A$ a-t-elle des solutions si A admet au moins une valeur propre strictement négative ?

e. Décrire l'ensemble des solutions dans le cas où toutes les valeurs propres sont positives.

7. On suppose maintenant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et que ses valeurs propres sont toutes strictement positives. *On ne suppose plus qu'elles sont distinctes.*

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Le but de cette question est de montrer qu'il existe alors une unique matrice M symétrique avec des valeurs propres strictement positives telle que $M^2 = A$.

a. Montrer, en la construisant, qu'il existe une matrice M symétrique avec des valeurs propres strictement positives telle que $M^2 = A$.

b. On suppose qu'il existe deux matrices M_1 et M_2 vérifiant la propriété précédente (c'est à dire que M_1 et M_2 sont toutes deux symétriques avec des valeurs propres strictement positives et vérifient $M_1^2 = M_2^2 = A$). On note $\mathrm{Sp}(M_1) = \{a_1, ..., a_n\}$ et $\mathrm{Sp}(M_2) = \{b_1, ..., b_n\}$. Enfin, on désigne par D_1 (respectivement D_2) la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs $a_1, ..., a_n$ (respectivement $b_1, ..., b_n$).

i. Justifier qu'il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que :

$$M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1} \quad \text{et} \quad M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}.$$

ii. On pose $P = P_1^{-1} P_2$. Montrer que $D_1^2 P = P D_2^2$ et en déduire que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $a_i^2 (P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j^2$.

iii. Montrer qu'on a alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_i (P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j$ puis que $D_1 P = P D_2$.

iv. Conclure que $M_1 = M_2$.

Partie 2 : Une suite de matrices

8. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{tr}({}^tAB) \end{array}$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On notera $(\cdot\,,\,\cdot)$ ce produit scalaire et $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

9. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|M\|_2 \leqslant n \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |(M)_{i,j}|.$$

Une suite $(M_k)_{k \geqslant 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *convergente coefficient par coefficient* si, pour tout couple d'entiers $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la suite $((M_k)_{i,j})_{k \geqslant 0}$ est convergente (de limite $\ell_{i,j}$). Auquel cas, on écrira

$$\lim_{k \to +\infty} M_k = L,$$

où L est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $(L)_{i,j} = \ell_{i,j}$.

10. Justifier que, si $(M_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet comme limite coefficient par coefficient la matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors, pour toutes matrices $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la suite de matrices $(K_1 M_k K_2)_{k\geqslant 0}$ converge coefficient par coefficient vers la matrice $K_1 L K_2$.

11. On considère un nombre réel $a \neq 0$ et la suite réelle $(u_m)_{m\geqslant 0}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & a \\ \forall m \in \mathbb{N},\quad u_{m+1} & = & \dfrac{1}{2}\left(u_m + \dfrac{1}{u_m}\right) \end{array}\right. .$$

a. Étudier et dresser le tableau de variations de la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.
On y fera figurer les limites de φ aux bords de l'ensemble de définition.

b. Montrer, par récurrence, que, si $a > 0$, alors $(u_m)_{m\geqslant 1}$ est bien définie et que, pour tout $m \geqslant 1$, $|u_m| \geqslant 1$ et u_m a le même signe que a.
On **admet** qu'avec un raisonnement analogue, on obtient le même résultat pour $a < 0$.

c. Montrer que $(u_m)_{m\geqslant 1}$ est monotone et qu'elle converge vers une limite $\varepsilon \in \{-1; 1\}$.

d. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant 1$, on a $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

e. En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $|u_m - \varepsilon| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^m |a - \varepsilon|$.

12. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et symétrique et on introduit la suite $(M_k)_{k\geqslant 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} M_0 & = & A \\ \forall k \in \mathbb{N},\quad M_{k+1} & = & \dfrac{1}{2}\left(M_k + M_k^{-1}\right) \end{array}\right. .$$

a. Justifier qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $D_0 = P^{-1}AP$ est diagonale et inversible.

b. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, M_k est bien définie et que la matrice $D_k = P^{-1}M_kP$ est diagonale et inversible et vérifie

$$D_{k+1} = \frac{1}{2}\left(D_k + D_k^{-1}\right).$$

c. En déduire que $(M_k)_{k\geqslant 0}$ converge coefficient par coefficient vers une matrice L qui vérifie $L^2 = I_n$.

d. *i.* Montrer, à l'aide de des Questions **9.** et **11.e.**, que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|M_k - L\|_2 \leqslant n\left(\frac{1}{2}\right)^k (1 + \rho(A)),$$

où $\rho(A) = \max\{|\lambda| \,:\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

ii. En reprenant le raisonnement de la Question **9.**, montrer qu'on a même, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|M_k - L\|_2 \leqslant \sqrt{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k (1 + \rho(A)).$$

e. Informatique. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous qui, prenant en argument la matrice A, renvoie une matrice M_k telle que $\|M_k - L\|_2 \leqslant 10^{-3}$.

```
def suite_matricielle(A):
    n = len(A)
    v = al.eig(A)[0]
    x, y = max(v), min(v)
    U, k = A, 0
    rho = max(..... , .....)
    while ................ :
        k = k+1
        U = ...........
    return U
```

Problème 2

La quatrième partie de ce problème est totalement indépendante de sa troisième partie.

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qu'on ne cherchera pas à préciser.

Dans tout le problème, on considère un paramètre réel $\lambda > 0$ et une suite $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n.$$

Partie 1 : Préliminaires

1. On introduit, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'intégrale : $I_m = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^m e^{-u} \mathrm{d}u$.

Montrer par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, I_m converge et que $I_m = m!$.

2. On considère, pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_n(t) = \begin{cases} n^2 t, & \text{si } 0 < t \leqslant \frac{1}{n} \\ n^2\left(\dfrac{2}{n} - t\right), & \text{si } \frac{1}{n} < t \leqslant \frac{2}{n} \\ 0, & \text{si } t \notin \left]0, \frac{2}{n}\right] \end{cases}.$$

a. Représenter l'allure de la courbe de h_n.
Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$, h_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

b. Soit $t \in [0, 1]$ fixé. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_n(t)$?

c. Vérifier alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 h_n(t)\mathrm{d}t \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} h_n(t)\mathrm{d}t.$$

*Le résultat de cette question permet d'observer que certaines permutations de limites et d'intégrales ne sont pas licites et justifie les étapes et le travail de la Question **19**.*

Partie 2 : Étude de S_n

3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et une variance et en préciser les valeurs.

4. L'objectif de cette question est de déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la loi suivie par S_n.

a. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On pose $X_i = \lambda Y_i$. Reconnaître la loi de X_i.

b. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, λS_n suit la loi gamma $\gamma(n)$.

c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est une variable aléatoire à densité dont une densité f_{S_n} est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{S_n}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}, & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

5. a. Déterminer pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance que l'on explicitera dans ce cas.

b. Déterminer pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ admet une variance que l'on explicitera dans ce cas.

On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $W_n = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}$.

6. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, W_n est une variable aléatoire à densité dont une densité f_{W_n} est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{W_n}(t) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} f_{S_n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda} t + \frac{n}{\lambda}\right).$$

7. a. Montrer que la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z de loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

b. Exprimer, sous forme d'une intégrale, la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t)\mathrm{d}t$.

Partie 3 : Estimation de λ par maximum de vraisemblance

On suppose que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer à partir d'un n-échantillon $(Y_1, Y_2, .., Y_n)$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_λ une densité de Y_1.

On utilise la méthode dite du *maximum de vraisemblance.*

8. On considère la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, définie sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{n+1}$ par

$$L : (\lambda, x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto \prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k).$$

On pose ensuite $\psi = \ln \circ L$.
Exprimer $L(\lambda, x_1, x_2, ..., x_n)$, puis $\psi(\lambda, x_1, x_2, ..., x_n)$ en fonction de λ, $x_1, ..., x_n$.

9. Après avoir justifié le caractère $\mathcal{C}^1$ de ψ sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{n+1}$, montrer que ψ n'y admet aucun point critique.

10. On suppose les x_i fixés (strictement positifs) et on considère alors la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(\lambda) = \ln\left(L(\lambda, x_1, x_2, ..., x_n)\right).$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\hat{z}$. Exprimer $\hat{z}$ en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$.
Vérifier que, pour tout $\lambda > 0$, $L(\lambda, x_1, ..., x_n) \leqslant L(\hat{z}, x_1, ..., x_n)$.

On pose dorénavant, pour $n \geqslant 3$, $Z_n = \dfrac{n}{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}$.

L'estimateur Z_n est appelé *estimateur du maximum de vraisemblance* pour λ.

11. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad E(Z_n) = \frac{n}{n-1}\lambda \quad \text{et} \quad V(Z_n) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2.$$

et déduire que Z_n est biaisé mais asymptotiquement sans biais pour λ.

12. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 3$, un estimateur $\tilde{Z}_n$ non biaisé pour λ. Est-il convergent ?

13. Soit $\alpha \in]0,1[$. On note $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. À l'aide de la Question **7.a.**, montrer que

$$\left[Z_n\left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right) ; \ Z_n\left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique au seuil $1 - \alpha$ pour λ.

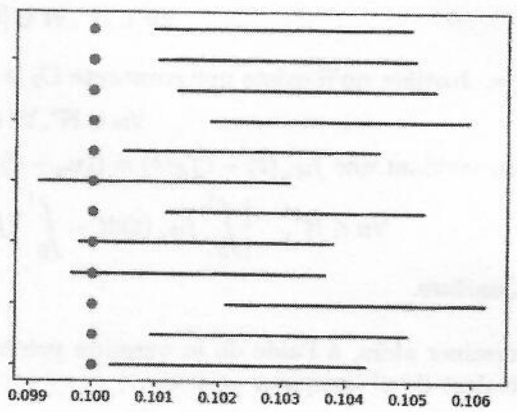
14. Informatique. En Python, la commande `ndtri(y)` de la bibliothèque `scipy.special` renvoie la valeur de $\Phi^{-1}(y)$. Recopier et compléter la fonction suivante qui prend en argument un réel α et un n−échantillon Y d'une loi exponentielle de paramètre λ et renvoie l'intervalle de confiance au seuil $1-\alpha$ pour λ.

```
def IdC(alpha, Y):
    n=len(Y)
    Z=.......
    t=sp.ndtri(1-alpha/2)
    A=.......
    B=.......
    return [A, B]
```

L'intervalle de confiance précédent permet de définir un test d'hypothèse au seuil $1-\alpha$. Disposant de l'observation d'un n−échantillon d'une loi exponentielle de paramètre λ inconnu, on rejettera l'hypothèse $\lambda = \lambda_0$ au risque α si λ_0 n'est pas dans l'intervalle de confiance précédent.

15. Application. Dans une usine de fabrication de composants électroniques, la durée de vie de chaque unité produite suit une loi exponentielle de paramètre $1/10$. Afin de contrôler la qualité des composants produits, on procède régulièrement à des tests. Lors de l'année 2023, on a, chaque mois, testé un lot de 100 composants. Les tests ont permis d'obtenir rapidement les durées de vie des composants et on a stocké ces informations dans une matrice T de taille 12×100.
On exécute alors les commandes suivantes qui permettent l'affichage ci-après. Interpréter.

```
for i in range(12):
    Y=T[i]
    A, B = IdC(alpha, Y)
    plt.plot ([A ,B] ,[i,i])
    plt.plot ([1/10] ,[i], 'o')
plt.show()
```



Partie 4 : Une convergence sous le signe intégral

On reprend les notations de la **Partie 2.** On introduit alors les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

16. a. À l'aide de la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0, montrer que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

b. En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ puis celle de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vers une limite $\ell > 0$.

17. À l'aide de la Question **6.**, vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une densité de W_n est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{W_n}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leqslant -\sqrt{n} \\ \dfrac{u_n}{\sqrt{2\pi}}\left(1+\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-\sqrt{n}t}, & \text{si } t > -\sqrt{n} \end{cases}.$$

Tournez la page S.V.P.

18. On introduit la fonction R définie sur $]-1;+\infty[$ par : $\forall u > -1,\ R(u) = \ln(1+u) - u + \dfrac{u^2}{2}$.

a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall t > -\sqrt{n}, \quad f_{W_n}(t) = u_n \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

b. Justifier qu'il existe un réel $M_1 \geqslant 0$ tel que, pour tout $u \in \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$: $|R(u)| \leqslant M_1 |u|^3$.

c. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} f_{W_n}(t) = \ell f_Z(t),$$

où f_Z désigne la densité de la variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

19. Le but de cette question est d'obtenir que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t)\mathrm{d}t = \ell \int_0^1 f_Z(t)\mathrm{d}t$.

a. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$, $g_n(t) = \left(1 + \dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}$.

i. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$|g_n'(t)| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\left|R'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|\right) e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}.$$

ii. Montrer qu'il existe un réel $M_2 \geqslant 0$ tel que, pour tout $u \in [0,1]$: $|R'(u)| \leqslant M_2 u^2$.

iii. Déduire des deux questions précédentes qu'il existe une constante $C_1 \geqslant 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \quad |g_n(t) - 1| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{n}}.$$

iv. Justifier qu'il existe une constante $C_2 \geqslant 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \quad |g_n(t)| \leqslant C_2.$$

b. En vérifiant que $f_{W_n}(t) - \ell f_Z(t) = \left((u_n - \ell)g_n(t) + \ell(g_n(t) - 1)\right) f_Z(t)$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\int_0^1 f_{W_n}(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \ell f_Z(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(C_2|u_n - \ell| + \frac{\ell C_1}{\sqrt{n}}\right) \int_0^1 f_Z(t)\mathrm{d}t.$$

c. Conclure.

20. Déterminer alors, à l'aide de la question précédente et de la Question **7.b**, la valeur de ℓ. En déduire un équivalent de $n!$ lorsque $n \to +\infty$.