BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 298

Conception : EDHEC

OPTION ECONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mai 2022, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $K_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $K_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $K_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $K_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ et on rappelle que (K_1, K_2, K_3, K_4) est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère l'application φ qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe :

$$\varphi(M)=JM-MJ$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) a) Exprimer $\varphi(K_1)$, $\varphi(K_2)$, $\varphi(K_3)$ et $\varphi(K_4)$ comme combinaisons linéaires de K_1, K_2, K_3, K_4.
b) Expliquer comment est construite la matrice A de φ dans la base (K_1, K_2, K_3, K_4) puis expliciter A.
c) En déduire que φ est diagonalisable.

3) a) Déterminer le rang de A, puis donner une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, puis montrer que (I, J) est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4) a) Calculer A^2 puis montrer que $A^3-4A=0$.
b) En déduire les valeurs propres possibles de φ.

5) En `Scilab`, la commande `r=rank(M)` renvoie dans la variable `r` le rang de la matrice M.
On a saisi :

```
A=[0,-1,1,0;-1,0,0,1;1,0,0,-1;0,1,-1,0]
r1=rank(A-2*eye(4,4))
r2=rank(A+2*eye(4,4))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,'r2=')
```

`Scilab` a renvoyé :

```
r1  =
      3.
r2  =
      3.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres non nulles de φ et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

6) a) Résoudre les systèmes $AX=2X$ et $AX=-2X$, avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$.

b) Déterminer le spectre de φ ainsi que les sous-espaces propres de φ.

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul, par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q=1-p$.

Dans la suite, on s'intéresse à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre, n niveaux numérotés 1, 2, ..., n, ce joueur ne pouvant accéder à un niveau que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il a réussi les n niveaux du jeu.
Pour tout entier k de $[\![1;n-1]\!]$, on dit que le joueur a le niveau k si, et seulement si, il a réussi le niveau k et échoué au niveau $k+1$. On dit que le joueur a le niveau n si, et seulement si, il a réussi le niveau n et on dit que le joueur a le niveau 0 s'il a échoué au niveau 1.
On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à p, la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à p.
On note X_n le niveau du joueur et on admet que X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Pour tout k de $[\![1;n]\!]$, on note R_k l'événement : « le joueur réussit le niveau k ».

1) Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de simuler ce jeu et d'afficher la valeur prise par X_n dès que l'utilisateur saisit une valeur pour p.

```
p=input('entrez la valeur de p dans ]0;1[ :')
n=input('entrez la valeur de n :')
X=-------
while ------ & rand()<=p
   X=--------
end
disp(X, 'le niveau du joueur est :')
```

2) a) Justifier soigneusement que l'ensemble des valeurs prises par X_n est $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

b) Déterminer la probabilité $P(X_n = 0)$.

c) Écrire l'événement $(X_n = n)$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $P(X_n = n)$.

d) Écrire, pour tout entier k de $[\![1, n-1]\!]$, l'événement $(X_n = k)$ à l'aide de certains des événements R_k puis déterminer la probabilité $P(X_n = k)$. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $k = 0$.

3) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.

4) a) Expliquer pourquoi X_n admet une espérance et écrire cette dernière sous forme d'une somme dépendant de n et de p.

b) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} E(X_n)$.

5) a) Montrer que, pour tout entier naturel k et pour tout entier n supérieur ou égal à $k+1$, on a $P(X_n = k) = p^k q$.

b) En déduire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une certaine variable aléatoire X.

c) On pose $Y = X + 1$.

Reconnaître la loi de Y puis en déduire l'espérance de X et la comparer à $\lim_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Exercice 3

1) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on considère la fonction f_n définie, pour tout réel x de $[0,1]$, par :

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n}$$

Dresser le tableau de variations de f_n.

2) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx$.

Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

3) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Justifier que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ (on prononce gamma) sa limite.

b) Vérifier que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ puis établir que $0 \leq \gamma \leq 1$.

c) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

5) a) Déterminer les deux réels a et b tels que, pour tout x de $[0,1]$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on ait $\frac{x}{k(x+k)}=\frac{a}{k}-\frac{b}{x+k}$, puis montrer que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ u_k=\frac{1}{k}-\ln(k+1)+\ln k$$

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)$$

6) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose : $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$.

a) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{1}{n+1}\leq\ln(n+1)-\ln n\leq\frac{1}{n}$. En déduire que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) Donner alors un encadrement de γ à l'aide des réels S_n et T_n.

7) a) En utilisant l'encadrement trouvé ci-dessus, préciser ce que représente S_n pour γ lorsque T_n-S_n est inférieur ou égal à 10^{-3} ?

b) Déterminer T_n-S_n, puis compléter le script Scilab suivant afin qu'il affiche une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

```
n=1
s=1-log(2)
while ---
  n=---
  s=s+---
end
disp(---)
```

Problème

Partie 1

Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q)=\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$.

1) a) Expliquer rapidement pourquoi cette intégrale est bien définie.

b) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'on a :

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ I(p,q)=\frac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$$

On **admet** que l'on peut en déduire par récurrence l'égalité :

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ I(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0)$$

2) a) Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, déterminer $I(p+q,0)$ puis exprimer $I(p,q)$ en fonction de p et q.

b) Montrer enfin que : $\forall p\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx=\frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Partie 2

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel quelconque et on pose $\alpha_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

On considère la fonction b_n définie par : $b_n(x) = \begin{cases} \alpha_n x^n (1-x)^n & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0;1] \end{cases}$.

3) Montrer que b_n est une densité.

On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n admet b_n comme densité.

4) Reconnaître la loi de X_0.

5) a) Utiliser la première partie pour montrer que X_n possède une espérance et que l'on a :

$$E(X_n) = \frac{1}{2}$$

b) Toujours en utilisant la première partie, montrer que X_n possède une variance et exprimer $V(X_n)$ en fonction de n.

c) En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Partie 3

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel et on se propose d'étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n \, \mathrm{d}t$, où l'on a toujours $\alpha_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6) Déterminer $f_0(x)$ pour tout réel x.

7) a) Donner la valeur de $f_n(1)$.

b) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale définissant $f_n(x)$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) + f_n(1-x) = 1$$

c) En déduire la valeur de $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

8) a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout réel x, l'expression de $f_n'(x)$ en fonction de x et n.

b) Étudier, suivant la parité de n, le signe de $f_n'(x)$ pour tout réel x.

9) a) En utilisant éventuellement la formule du binôme de Newton, montrer que f_n est une fonction polynomiale puis en déduire les valeurs de $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ et de $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ selon que n est pair ou impair.

b) Dresser le tableau de variations de f_n (toujours en distinguant les cas n pair et n impair).

10) Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

a) Pour tout réel x, déterminer $f_n''(x)$ en fonction de x et n.

b) En déduire que (C_n) possède un point d'inflexion si n est impair et trois si n est pair.

c) Tracer, selon la parité de n, l'allure de (C_n).