ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

5 mai 2015 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document, seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) a) Déterminer la dimension de $\text{Im}(f)$, puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4,\ e_1 + e_5)$ est une base de $\text{Im}(f)$.

b) En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis donner une base de $\text{Ker}(f)$.

2) On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.

a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, puis $f(u-v)$ et $f(u+3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.

b) En déduire les valeurs propres de f et préciser les sous-espaces propres associés.

c) Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice R inversible telles que $C = RDR^{-1}$.

3) a) Établir la relation suivante : $D(D+I)(D-3I) = 0$.

b) En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C.

4) On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Q_n et trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

a) En utilisant les racines de P, déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

b) Déduire de ce qui précède l'expression, pour tout entier naturel n non nul, de C^n en fonction de C et C^2.

5) Compléter, à l'aide de matrices de type `zeros` et `ones`, les deux espaces laissés libres dans la commande `Scilab` suivante pour qu'elle permette de construire la matrice C.

```
C = [ones(1,5);------,------;ones(1,5)]
```

Exercice 2

Trois personnes, notées A, B et C entrent simultanément dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients A et B occupent simultanément à l'instant 0 les deux guichets tandis que C attend que l'un de ces deux guichets se libère pour se faire servir.

On suppose que :

• Les durées de passage au guichet des trois personnes A, B et C sont mesurées en heures et on suppose que ce sont des variables aléatoires indépendantes, notées respectivement X, Y et Z, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1[$.

• La durée du changement de personne à un guichet est négligeable.

1) On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$ et on admet que U et V sont des variables aléatoires.

a) Montrer que la fonction de répartition F_U de U est définie par : $F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2x - x^2 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

b) En déduire que U est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_U de U.

c) Déterminer l'espérance et la variance de U.

2) On note T le temps total passé par C dans l'agence bancaire.

a) Exprimer T en fonction de certaines des variables précédentes.

b) En déduire $E(T)$ et $V(T)$.

3) a) On rappelle que, si `a` et `b` sont deux vecteurs lignes de taille n, les commandes `m = min(a,b)` et `M = max(a,b)` renvoient les vecteurs `m` et `M`, de même taille que `a` et `b`, et tels que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on ait : `m(i) = min(a(i), b(i))` et `M(i) = max(a(i), b(i))`.

On rappelle également que `grand(1,n,'unf',0,1)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.

Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles permettent de simuler n fois les variables aléatoires U, V et T, pour n entré par l'utilisateur :

```
n = input('entrez la valeur de n :')
x = grand(1,n,'unf',0,1)
y = grand(1,n,'unf',0,1)
z = grand(1,n,'unf',0,1)
u = ------ ; disp(u, 'u = ')
v = ------ ; disp(v, 'v = ')
t = ------ ; disp(t, 't = ')
```

b) Que représente l'événement $(T \geq V)$?

c) On souhaite déterminer une valeur approchée de la probabilité $p = P(T \geq V)$ en simulant un grand nombre de fois le passage des clients A, B et C aux guichets.

Compléter les commandes `p = ------ ; disp(p, 'p = ')` pour que, placées sous les commandes écrites à la question 3a), elles permettent d'obtenir une valeur approchée de p.

d) Lors de plusieurs essais des commandes ci-dessus, avec $n = 10000$, la réponse donnée par `Scilab` est comprise entre 0.66 et 0.67. Que peut-on conjecturer quant à la valeur exacte de p ?

Exercice 3

1) Pour tout entier naturel k, on pose :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$$

a) Justifier que I_0, I_1 et I_2 sont des intégrales convergentes et donner leur valeur (on pourra s'appuyer sur le cours de probabilité).

b) Pour tout réel a positif et tout entier naturel k, on pose : $I_k(a) = \int_0^a t^k e^{-t}\, dt$.

Établir, grâce à une intégration par parties, que : $I_{k+1}(a) = (k+1) I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}$.

c) En déduire que I_3 et I_4 sont des intégrales convergentes et vérifier que : $I_3 = 6$ et $I_4 = 24$.

2) Déduire des questions précédentes que, pour tout couple (x, y) de réels, $\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$ est une intégrale convergente.

On considère, pour toute la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$$

3) a) Vérifier que l'on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$.

b) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

4) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis déterminer le seul point critique (a,b) de f.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a,b)$ de f en son point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a,b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a,b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.

5) Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.

a) Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \cdots$$

b) Compléter de même l'égalité : $\frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y-2)^2 + \cdots$

c) En déduire une autre écriture de $f(x,y)$ montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.

Problème

Partie 1

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1) a) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}$, $0 \le \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \le \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

b) En déduire que: $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.

2) a) Pour tout réel t de $[0, 1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

b) En déduire que : $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

c) Utiliser la question 1) pour montrer que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

d) Conclure que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt$.

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$.

Partie 2

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne "pile" avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier "pile".

Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que ce joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur a gagné ».

On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

1) Reconnaître la loi de N.

2) **a)** Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

b) Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent N et X puis renvoient l'un des deux messages : « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```
p = input('donner la valeur de p')
N = grand(1,1,'geom',---)//'geom' désigne une loi géométrique
X = grand(1,1,'uin',---)//'uin' désigne une loi uniforme discrète
if ------ then disp('------'), else disp('------'), end
```

3) **a)** Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$.

b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$.

c) Déterminer $P_{(N=2j)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.

d) Déterminer $P_{(N=2j+1)}(X = 2k+1)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.

4) **a)** Justifier que $P(X = 2k+1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(X = 2k+1)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right)$$

b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = 2k+1) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt$.

5) **a)** Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2 (1+t)} dt = 0$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = 2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt \right)$.

c) En déduire que : $P(A) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt$.

6) **a)** Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

b) Écrire $P(A)$ explicitement en fonction de q.

c) En déduire que $P(A) > \dfrac{1}{2}$.