Concours d'admission sur classes préparatoires
Option économique

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2015

Présentation de l'épreuve

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
• Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (deuxième exercice et problème).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.
• Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet plutôt moins long que d'habitude, mélangeant questions faciles et questions plus difficiles, et bien adapté au public concerné. La présence de questions techniquement difficiles ou abstraites a permis de bien apprécier, d'une part les capacités à mener un calcul compliqué à son terme et d'autre part les capacités à raisonner des candidats : ceux d'entre eux qui étaient bien préparés se sont très bien démarqués alors que ceux qui l'étaient moins ont montré leurs faiblesses théoriques ainsi que leur mauvaise maîtrise des techniques de base, notamment dans les calculs, parfois même dans les calculs élémentaires.

Description du sujet

L'exercice 1 proposait l'étude de la matrice $C=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$ ainsi que le calcul de C^n grâce à la division euclidienne du polynôme X^n par un polynôme annulateur de C. La dernière question demandait de compléter des commandes `Scilab` permettant la construction de la matrice C.

• Cet exercice a montré que les notions de noyau et d'image restent floues pour un nombre significatif de candidats, mais il y a des progrès par rapport aux années précédentes. La différence entre famille génératrice et base est, elle aussi, peu claire chez nombre de candidats.
• La majorité des candidats établissent qu'une famille de deux vecteurs est libre et concluent que cette famille est une base de $\mathrm{Im} f$, puisque $\mathrm{Im} f$ est de dimension 2 : en revanche, ils oublient de vérifier que ces deux vecteurs appartiennent à $\mathrm{Im} f$!
• Beaucoup de candidats peinent (ou échouent) à résoudre un système de trois équations dans lequel interviennent des fractions, ainsi que les nombres $(-1)^n$ et 3^n.

L'exercice 2, portant sur la partie "variables à densité" du programme de probabilité, présentait l'étude d'une file d'attente de trois clients pour deux guichets, les temps de passages étant des variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. La dernière question demandait, d'une part, de compléter des commandes `Scilab` simulant la situation, et d'autre part, de trouver une commande permettant de calculer une valeur approchée de la probabilité que le client ayant accédé en dernier à un guichet ait terminé le dernier.

• Cet exercice a révélé que certains candidats ne maîtrisent pas le cours : par exemple, concernant les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
En revanche, une majorité sait trouver la loi de $\min(X,Y)$ lorsque X et Y sont indépendantes.

L'exercice 3 portant sur la partie analyse, avait pour objectif d'étudier la fonction f, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$$

Il s'agissait d'établir que cette fonction possède un minimum global atteint une seule fois.

• Une bonne majorité de candidats sait étudier les extrema d'une fonction simple de deux variables et c'est très encourageant.
• En revanche, cet exercice a révélé les failles de certains candidats, notamment en ce qui concerne les mécanismes usuels de calcul, comme par exemple calculer $f(-4,2)$ lorsque la fonction f est définie par :

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$$

Le problème, portant sur le programme d'analyse et de probabilité, démontrait deux résultats importants pour la suite dans la première partie, à savoir :

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt \quad \text{et} \quad \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt$$

La deuxième partie étudiait un jeu pour lequel un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce, note le rang n du premier *Pile*, puis place des boules numérotées de 1 à n dans une urne dont il extrait une boule au hasard : le joueur gagne si le numéro porté par la boule tirée est impair.
Une des questions proposait une simulation informatique de la situation.

• Trop de candidats n'ont pas pu s'exprimer à leur gré sur ce problème, peut-être à cause d'une mauvaise gestion du temps, notamment en cherchant par le calcul les sous-espaces propres demandés à l'exercice 1.
• Le problème a permis de distinguer les candidats qui réfléchissent : il a permis aux meilleurs de faire la différence, notamment car certaines questions étaient ouvertes (probabilités conditionnelles à déterminer) et qu'il fallait réfléchir un peu pour trouver le résultat. Dans l'ensemble, il a été plutôt bien réussi par les rares candidats qui ont eu le temps (ou la présence d'esprit) de s'y intéresser...

• On a souvent lu que, si N suit la loi géométrique de paramètre p, alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(N=k) = (1-p)^{k-1} p^k$$

Ceci prouve, une fois encore que parfois, les notions élémentaires ne sont pas maîtrisées.
• Trop de candidats pensent que l'événement $(X = 2k+1)$ signifie « X prend une valeur impaire ».
• Comme d'habitude, la formule des probabilités totales a été copieusement martyrisée par certains candidats.

Statistiques

• Pour l'ensemble des 3685 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10.344 sur 20 (un peu supérieure à celle de l'année dernière et voisine de celle de 2013) et l'écart type vaut 5,79 (légèrement inférieur à celui de l'année dernière).

• 37,2% des candidats, contre 43% l'année dernière, ont une note strictement inférieure à 8 (parmi eux, 16,3% ont une note inférieure à 4).

• 22,2% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage supérieur à celui de 2014 qui était égal à 19%).

• 20,1% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage inférieur à celui de 2014 qui était égal à 23,6%).

Conclusion

L'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font. Et ce fossé entre les aspirations du programme et la réalisation sur le « terrain » semble s'être élargi cette année.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées malgré la présence d'un nombre assez élevé de candidats qui ne respectent pas la numérotation des questions, écrivent mal (ce sont souvent les mêmes) et rendent la tâche du correcteur pénible : qu'ils sachent qu'ils n'ont rien à gagner à pratiquer de la sorte, bien au contraire.
Citons également, ceux, en assez grand nombre, qui font de nombreuses fautes de calcul (souvent par manque de concentration) qui perturbent gravement le déroulement du raisonnement et empêchent de trouver le bon résultat voire obligent à tricher pour le trouver !
Il semble que l'investissement en informatique ait été un peu moins intense que les années précédentes, ce qui est dommage puisqu'il y avait, comme d'habitude, pas mal de points à glaner sur ces questions, et ceci sans y passer énormément de temps.

Il reste toujours un noyau de candidats qui ne peuvent s'empêcher de faire du remplissage au lieu d'argumenter face aux questions dont le résultat est donné : aucun correcteur n'est dupe, rappelons-le.

Précisons pour les futurs candidats qu'ils ne sont pas obligés de recopier les énoncés des questions avant de les traiter et qu'ils ne sont pas, non plus, obligés de recopier tout un programme d'informatique si la question posée était seulement de compléter quelques instructions manquantes.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.