



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code épreuve :

298

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

**MATHEMATIQUES**

Option économique

Vendredi 6 mai 2011 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

### Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $f(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt$  si  $x > 0$  et  $f(0) = \frac{1}{2}$ .

1) a) Montrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[, \forall t \in [0, x], \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}$ .

b) Établir alors que, pour tout réel  $x$  strictement positif, on a :  $\frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ .

c) En déduire que la fonction  $f$  est continue (à droite) en 0.

2) a) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , puis vérifier que, pour tout réel  $x$  strictement positif, on peut écrire :  $f'(x) = -\frac{4}{x^3} g(x)$ , où  $g$  est une fonction que l'on déterminera.

b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction  $g$ . En déduire que  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

3) a) Montrer que, pour tout réel  $t$  positif, on a :  $\frac{t}{e^t + 1} \leq 1$ .

b) En déduire la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

## Exercice 2

On désigne par  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note  $\mathcal{B}$  la base  $(e_0, e_1, e_2)$  de  $E$ , où pour tout réel  $x$ , on a :  $e_0(x) = 1$ ,  $e_1(x) = x$  et  $e_2(x) = x^2$ .

On considère l'application, notée  $f$ , qui à toute fonction polynomiale  $P$  appartenant à  $E$ , associe la fonction polynomiale  $f(P)$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(P))(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x).$$

- 1) a) Montrer que  $f$  est une application linéaire.  
b) En écrivant, pour tout réel  $x$ ,  $P(x) = a + bx + cx^2$ , définir explicitement  $(f(P))(x)$  puis en déduire que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .  
c) Écrire  $f(e_0)$ ,  $f(e_1)$  et  $f(e_2)$  comme des combinaisons linéaires de  $e_0$ ,  $e_1$  et  $e_2$ , puis en déduire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- 2) a) Vérifier que  $\text{Im} f = \text{vect}(e_1, e_0 + e_2)$  et donner la dimension de  $\text{Im} f$ .  
b) Déterminer  $\text{Ker} f$ .
- 3) a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de  $A$ .  
b) En déduire que  $f$  est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de  $f$ .  
c) Vérifier que les sous-espaces propres de  $f$ , autres que  $\text{Ker} f$ , sont inclus dans  $\text{Im} f$ .

## Exercice 3

On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de  $n$  urnes, numérotées de 1 à  $n$ , contenant chacune  $n$  boules. On répète  $n$  épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée  $i$  contient toujours  $n$  boules au bout de ces  $n$  épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

- 1) a) Pour tout  $i$  et pour tout  $k$ , éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $U_{i,k}$  l'événement « l'urne numéro  $i$  est choisie à la  $k^{\text{ème}}$  épreuve ».

Écrire l'événement  $(X_i = 1)$  à l'aide de certains des événements  $U_{i,k}$ , puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

- b) Justifier également que, si  $i$  et  $j$  sont deux entiers distincts, éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on a :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

- c) Comparer  $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$  et  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$  et en déduire que, si  $i$  et  $j$  sont deux entiers naturels distincts, éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , alors les variables aléatoires  $X_i$  et  $X_j$  ne sont pas indépendantes.

- 2) On pose  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$

- a) Déterminer l'espérance de  $Y_n$ , notée  $E(Y_n)$ .

- b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$  et donner un équivalent de  $E(Y_n)$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ .

3) Pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $N_i$  la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée  $i$  à la fin de ces  $n$  épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de  $N_i$  ainsi que la valeur de  $E(N_i)$ .

b) Que vaut le produit  $N_i X_i$  ?

c) Les variables  $N_i$  et  $X_i$  sont-elles indépendantes ?

4) Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par  $X_1$  et  $N_1$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec_2011 ;
Var x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
Randomize ;
Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2') ;
Readln(n) ;
n1 := 0 ; x1 := 1 ;
For k := 1 to n do
begin
hasard := random(n) + 1 ;
If hasard = 1 then begin x1 := ----- ; n1 := ----- ; end ;
end ;
Writeln(x1, n1) ;
End.
```

## Problème

### Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , et indépendantes.

On suppose que  $X$  est une variable à densité et on note  $F_X$  sa fonction de répartition.

On suppose par ailleurs que la loi de  $Y$  est donnée par :  $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$ .

L'indépendance de  $X$  et  $Y$  se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel  $x$  :

$$P([X \leq x] \cap [Y = 1]) = P(X \leq x)P(Y = 1) \text{ et } P([X \leq x] \cap [Y = -1]) = P(X \leq x)P(Y = -1).$$

On pose  $Z = XY$  et on admet que  $Z$  est, elle aussi, une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire  $Z$  en fonction de la loi de  $X$  dans les parties 2 et 3.

### Partie 1 : expression de la fonction de répartition de $Z$ en fonction de celle de $X$ .

1) Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $[a, b]$  (avec  $a < b$ ) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  (avec  $\lambda > 0$ ).

2) En utilisant le système complet d'événements  $\{(Y = 1), (Y = -1)\}$ , montrer que la fonction de répartition  $F_Z$  de la variable aléatoire  $Z$  est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \frac{1}{2}(F_X(x) - F_X(-x) + 1).$$

**Partie 2 : étude de deux premiers exemples**

1) On suppose que la loi de  $X$  est la loi normale centrée réduite. Reconnaitre la loi de  $Z$ .

2) On suppose que la loi de  $X$  est la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

a) Déterminer l'expression de  $F_X(-x)$  selon les valeurs prises par  $x$ .

b) Déterminer  $F_Z(x)$  pour tout réel  $x$ , puis reconnaître la loi de  $Z$ .

**Partie 3 : étude du cas où la loi de  $X$  est la loi exponentielle de paramètre 1.**

1) a) Montrer que la fonction de répartition  $F_Z$  de la variable aléatoire  $Z$  est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) En déduire que  $Z$  est une variable aléatoire à densité.

c) Établir alors qu'une densité de  $Z$  est la fonction  $f_Z$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

2) a) Donner la valeur de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ .

b) Montrer que  $f_Z$  est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de  $E(Z)$ .

3) a) Donner la valeur de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ .

b) En déduire l'existence et la valeur de  $E(Z^2)$ , puis donner la valeur de la variance de  $Z$ .

4) a) Déterminer  $E(X)E(Y)$  et comparer avec  $E(Z)$ . Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

b) Exprimer  $Z^2$  en fonction de  $X$ , puis en déduire de nouveau la variance de  $Z$ .

5) Soit  $U$  et  $V$  des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$  et la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

a) On pose  $Q = -\ln(1-V)$  et on admet que  $Q$  est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de  $Q$  et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire  $Q$ .

b) On pose  $R = 2U - 1$  et on admet que  $R$  est une variable aléatoire. Déterminer  $R(\Omega)$  et donner la loi suivie par la variable aléatoire  $R$ .

c) Informatique.

En tenant compte des résultats des questions 5a) et 5b), écrire en Turbo Pascal une déclaration de fonction dont l'en-tête est **function z : real** ; pour qu'elle simule la loi de  $Z$ .