BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Code sujet : 297**

## Conception : EDHEC BS

# MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

## FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

## VOIE GÉNÉRALE

Lundi 28 avril 2025, de 14 h. à 18 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## Exercice 1.

On désigne par $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction $f_n$ définie sur $]n, +\infty[$ par :

$$\forall x \in ]n, +\infty[, \; f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n)$$

On considère aussi une fonction $g$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1. (a) Dresser le tableau de variations de $g$, limites comprises.

   (b) En déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right)_{k\geq 3}$ est décroissante puis que :

$$\forall k \geq 4, \; \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}$$

2. (a) Justifier que $f_n$ est dérivable sur $]n, +\infty[$ et donner l'expression de $f_n'(x)$ pour tout réel $x > n$.

   (b) Montrer que pour tout réel $t > 0$, $\ln(t) \leq t - 1$.
   En déduire que $f_n$ est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

   (c) Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à deux.
   Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n+1, n+2]$, admet une unique solution, que l'on note $x_n$.

3. Montrer l'équivalent suivant : $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

4. (a) Justifier que :

$$\forall n \geq 2,\ \ln(x_n - n) = (x_n - n)\frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - n) = 1$.

5. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2,\ u_n = x_n - n - 1$.

(a) Justifier que :

$$\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \quad \text{et} \quad \ln(1+n+u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

(b) Avec la question 4.(a), montrer alors que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

6. Déterminer la nature des séries de termes généraux $u_n$ et $u_n^2$.

## Exercice 2.

Soit $E$ un espace euclidien.
Le produit scalaire de deux vecteurs $x$ et $y$ de $E$ est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de $x$ est notée $\|x\|$.

On rappelle le résultat de cours suivant : si $p$ est un projecteur de $E$, alors $p$ est un projecteur orthogonal de $E$ si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique de $E$.

Dans la suite de l'exercice, les sous-espaces vectoriels considérés de $E$ seront non triviaux (différents de $E$ et ne contenant pas uniquement le vecteur nul).

1. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $p$ la projection orthogonale sur $F$.

(a) Montrer l'inclusion suivante :

$$F \subset \{x \in E,\ \|p(x)\| = \|x\|\}$$

(b) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$.

(c) En déduire que :

$$F = \{x \in E,\ \|p(x)\| = \|x\|\}$$

et que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Dans la suite de l'exercice, on considère $F_1, F_2$ et $F_3$ trois sous-espaces vectoriels de $E$ et pour $i \in \{1,2,3\}$, on note $p_i$ la projection orthogonale sur $F_i$.

2. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_3$.

(a) Montrer que $F_1 \cap F_2 \subset F_3$.

(b) Soit $x$ un vecteur de $F_3$. En utilisant la question 1.(c), montrer que :

$$\|x\| \leq \|p_2(x)\|$$

En déduire que $x$ appartient à $F_2$ puis montrer que $x$ appartient à $F_1$.

(c) Qu'en déduit-on pour les sous-espaces vectoriels $F_1 \cap F_2$ et $F_3$ ?

(d) Justifier que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle p_3(x), y\rangle = \langle x, p_3(y)\rangle$$

et en déduire l'égalité suivante :

$$\langle p_1 \circ p_2(x), y\rangle = \langle p_2 \circ p_1(x), y\rangle$$

(e) Montrer alors que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

3. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ et on pose $p = p_1 \circ p_2$.

(a) Montrer que $p$ est un projecteur de $E$.

(b) Montrer que $p$ est un endomorphisme symétrique de $E$.

(c) En déduire que $p_1 \circ p_2$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à préciser.

4. Énoncer précisément le résultat démontré dans les questions 2 et 3.

## Exercice 3.

On suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

On définit la fonction $f$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -2x\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**Partie 1. Étude d'une variable aléatoire.**

1. Montrer que $f$ peut être considérée comme une densité.

*On considère dans la suite une variable aléatoire $X$ telle que $X(\Omega) = ]-\infty, 0]$, de densité $f$, et on note $F$ sa fonction de répartition.*

2. Déterminer, pour tout réel $x$, l'expression de $F(x)$.
3. Rappeler l'expression d'une densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$.
4. En déduire que $X$ admet une espérance et calculer celle-ci.

On pose $Z = X^2$ et on admet que $Z$ est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que $X$. On note $G$ sa fonction de répartition.

5. Pour tout réel positif $x$, exprimer $G(x)$ en fonction de $F$ et de $x$.
   En déduire que $Z$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
6. En déduire que $X$ admet une variance et donner sa valeur.
7. On souhaite dans cette question simuler la variable $X$ à l'aide de Python.
   On considère importées les bibliothèques numpy et numpy.random de la manière suivante :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

   On rappelle que l'instruction `rd.exponential(1)` permet de simuler la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

   Compléter le code suivant afin qu'il simule $n$ réalisations de la variable $X$ (la fonction renvoie alors une matrice ligne constituée de ces réalisations).

```
def simulX(n):
    M=np.zeros(n) # Matrice ligne de taille n constituée de 0
    for i in range(n):
        ...
    return M
```

   Écrire alors une fonction Python nommée `EsperanceX`, prenant en entrée un entier naturel $n$, et qui renvoie une valeur approchée de l'espérance de $X$, en utilisant le résultat de `simulX(n)` (et sans aucune fonction venant d'une bibliothèque particulière).

**Partie 2. Étude d'une convergence en loi.**

On définit une fonction $h$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2(1-x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

8. Montrer que $h$ peut être considérée comme une densité.

*On considère dans la suite une variable aléatoire $Y$ telle que $Y(\Omega) = [0,1]$, de densité $h$, et on note $H$ sa fonction de répartition.*

9. Déterminer pour tout réel $x$, l'expression de $H(x)$.

On considère maintenant une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires, toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi que $Y$.

On définit alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ et on admet que $M_n$ est elle aussi une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
On pose pour finir $T_n = \sqrt{n}(M_n - 1)$.

10. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n$ la fonction de répartition de $T_n$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \left[H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

11. Déterminer, pour tout réel $y$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$.
12. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers $X$.

## Problème

On considère la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

Le problème est décomposé en quatre parties. Dans la partie 1, on utilise l'algorithmique pour coder les termes de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$. Dans la partie 2, on obtient des estimations de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$. Dans la partie 3, à l'aide de la partie 2, on étudie une variable aléatoire. Dans la partie 4, à l'aide de la partie 2, on étudie une fonction dont l'expression est donnée par une somme.

**Les parties 3 et 4 sont totalement indépendantes.**

On rappelle que pour une suite $(u_k)_{k\geq 0}$, $\prod\limits_{k=1}^{0} u_k = 1$ par convention.

On rappelle aussi que si $p, q$ sont deux entiers naturels, tels que $p < q$, $[\![p\,;q]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre $p$ (inclus) et $q$ (inclus).

### Partie 1.

1. Justifier que pour tout entier naturel $n$, $B_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k}$.

Compléter alors le code de la fonction Python B, prenant en entrée un entier naturel $n$, et qui renvoie la valeur de $B_n$.

```
def B(n):
    P=...
    for k in range(....):
        P=....
    return P
```

## Partie 2.

On pose pour tout entier naturel $n$, $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \, dt$.

2. Calculer $W_0$ et $W_1$.
3. Montrer que $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
4. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
5. En déduire que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n \text{ et } W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$$

6. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $W_{2n-1} = \frac{1}{2nB_n}$.
7. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2nB_n}$$

puis :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

8. En déduire un équivalent de $B_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## Partie 3.

On considère dans cette section du problème une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :

$$\forall n \geq 1, \ \mathrm{P}(X_n = 1) = \mathrm{P}(X_n = -1)$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire $Y_k$ définie par : $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$.
   On précisera son espérance et sa variance.
   (b) En déduire la loi de la variable $T_n$ définie par : $T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (c) Montrer que $S_n(\Omega) = \{2j - n, \ j \in [\![0\,;n]\!]\}$ et déterminer la loi de $S_n$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On définit la variable aléatoire $R_n$ comme étant le cardinal de l'ensemble $\{k \in [\![1\,;2n]\!], \ S_k = 0\}$.
   Autrement dit, pour $\omega \in \Omega$, $R_n(\omega)$ est égal au nombre d'entiers $k \in [\![1\,;2n]\!]$ tels que $S_k(\omega) = 0$.
   (a) Justifier que :

   $$R_n = \mathrm{Card}(\{k \in [\![1\,;n]\!], \ S_{2k} = 0\})$$

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{P}(S_{2k} = 0) = B_k$.
   (c) *On rappelle que si $A$ est un évènement, la fonction indicatrice de $A$, notée $\mathbf{1}_A$, définie de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$, est définie par $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.*
   On pose pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, $A_k = (S_{2k} = 0)$. Donner une expression de $R_n$ à l'aide des fonctions indicatrices des évènements $A_k$.

(d) En déduire que l'espérance de $R_n$ est donnée par la formule :

$$\mathrm{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{n} B_k$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

12. En déduire alors, à l'aide de la partie 2, puis par sommation, un équivalent de l'espérance de $R_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## Partie 4.

13. (a) Montrer que :

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}$$

(b) En déduire que pour tout réel $x \in [0, 4[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge.

Soit $f$ la fonction définie sur $[0, 4[$ par :

$$\forall x \in [0, 4[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$$

14. Justifier que $f$ est croissante sur $[0, 4[$.
*On admet dans la suite que $f$ est continue sur $]0, 4[$.*

15. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, 4[$ et tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

(b) En déduire que :

$$\forall x \in [0, 4[,\quad \sqrt{\pi}\frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4} \times \frac{1}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x}\right)$$

Déterminer alors les limites de $f$ en $0^+$ et $4^-$. Qu'en déduit-on pour $f$ en 0 ?

16. Montrer que pour tout réel $x \in [0, 4[$, $f(x) \geq \dfrac{x}{2}$.

17. On admet que :

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{x}{2} + \circ(x)$$

En utilisant tous les résultats précédents, tracer l'allure précise de la courbe de la fonction $f$.