ECRICOME
VISER PLUS HAUT

CONCOURS D'ADMISSION 2014

3

Mathématiques

Option Technologique

Mercredi 16 avril 2014 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

2. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de g sur $]0,+\infty[$.

3. Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$. On la note α.

4. Justifier que :
$$\alpha \in [1,e] \quad \text{et} \quad f(\alpha) = \alpha.$$

5. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et préciser la monotonie de la fonction f.

6. Démontrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant e.$$

7. Vérifier que :
$$\forall x \in [1,e], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$
En déduire, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

8. Démontrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{e-1}{2^n}.$$

9. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

EXERCICE 2

Cet exercice est composé de deux parties.

La partie **I** consiste à calculer en fonction de n les termes d'une suite récurrente $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

La partie **II** étudie l'obtention du premier double PILE lors de lancers d'une pièce déséquilibrée.

Les résultats de la partie **I** peuvent être utilisés librement dans la partie **II.**

PARTIE I : Etude d'une suite.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{4}{9}, \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n.$$

On considère également les quatre matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } D = QAP$$

ainsi que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, les matrices colonnes :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_n = QX_n.$$

1. Vérifier que les deux matrices PQ et D sont diagonales (*Les calculs devront être inscrits sur la copie*).
2. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.
3. Soit $n \geqslant 1$. Donner, en la justifiant, la relation liant X_{n+1}, A et X_n. Prouver que $PY_n = X_n$. En déduire que :
$$Y_{n+1} = DY_n.$$
4. Prouver que :
$$\forall n \geqslant 1, \quad Y_n = D^{n-1}Y_1.$$

5. Calculer Y_1 et expliciter les coefficients de la matrice colonne Y_n.

6. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

PARTIE II : Probabilités discrètes.

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir PILE vaut $\frac{2}{3}$.

On suppose donné un espace probabilisé muni d'une probabilité P modélisant cette expérience.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang n si on obtient PILE au $(n-1)$-ième lancer et PILE au n-ième lancer.

On note :

- pour tout entier $n \geqslant 1$, F_n l'événement « on obtient FACE au n-ième lancer » ;
- pour tout entier $n \geqslant 2$, D_n l'événement « on obtient un double PILE au rang n **pour la première fois** » ;
- pour tout entier $n \geqslant 2$, $v_n = P(D_n)$. On conviendra que $v_1 = 0$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement :

« PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE »

alors l'événement D_8 est réalisé.

1. On lance n fois de suite la pièce de monnaie. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours de ces n lancers.

   (a) Déterminer la loi de X (*une réponse argumentée est attendue*). Préciser l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable X ainsi que la valeur de $P(X = k)$ lorsque $k \in X(\Omega)$.

   (b) Donner la valeur de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

2. On lance indéfiniment la pièce. On note Y le rang d'apparition du premier PILE, s'il apparait.

(a) Déterminer la loi de Y (*une réponse argumentée est attendue*). Préciser l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par la variable Y ainsi que la valeur de $P(Y=k)$ lorsque $k \in Y(\Omega)$.

(b) Donner la valeur de l'espérance $E(Y)$ et de la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y.

3. Calculer v_2 et v_3. Vérifier que :

$$v_3 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1.$$

Rappelons que l'on a convenu que $v_1 = 0$.

4. Soit $n \geqslant 2$. On suppose qu'au premier lancer, PILE est obtenu et on souhaite la réalisation de l'événement D_{n+2}.

Quel est alors le résultat du second lancer ? A l'issue de ces deux premiers lancers, combien de lancers reste-t-il à effectuer pour que D_{n+2} puisse se réaliser ? *Les réponses devront être justifiées.*

En déduire que :

$$P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \frac{1}{3}v_n.$$

5. Pour $n \geqslant 2$, justifier que :

$$P_{F_1}(D_{n+2}) = v_{n+1}.$$

6. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n.$$

En outre, d'après la question **II.3,** *cette formule est vraie pour* $n = 1$.

7. A l'aide de la partie **I**, justifier que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(D_n) = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

8. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note E_n l'événement « il n'y a pas eu deux PILE consécutifs au cours des n premiers lancers ».

Exprimer l'événement $\overline{E_n}$ en fonction des événements $D_2, .., D_n$. En déduire que :

$$P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} v_k.$$

9. Calculer la limite de $P(E_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

EXERCICE 3

On considère les fonctions f, g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{1+e^x}, \qquad g(x) = -2\ln\left(1+e^{-x}\right)$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Soit $x \geqslant 0$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ puis vérifier que :

$$h(x) = -f'(x) \quad \text{et} \quad f(x) = g'(x).$$

2. Soit $A \geqslant 0$. Justifier que :

$$\int_0^A h(x)\,dx = 1 - f(A).$$

Que vaut $\displaystyle\int_0^A f(x)\,dx$?

3. Soit $A \geqslant 0$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^A x.h(x)\,dx = -Af(A) + g(A) - g(0).$$

4. La fonction h est-elle continue en 0 ? *Une réponse argumentée est attendue.*
5. Prouver que h est une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par Z une variable aléatoire dont h est une densité.

6. Démontrer que la fonction de répartition H de Z est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \geqslant 0, & H(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ \text{si } x < 0, & H(x) = 0. \end{cases}$$

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

7. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(Z \geqslant \ln(2)), \quad P(\ln(2) \leqslant Z \leqslant \ln(8)) \quad \text{et} \quad P_{(Z \geqslant \ln(2))}(Z \leqslant \ln(8)).$$

On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

8. Déterminer la médiane de Z c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle

$$H(x) = \frac{1}{2}.$$

9. Etablir que Z possède une espérance et donner la valeur de $E(Z)$.