RAPPORT

COMMENTAIRES GENERAUX

Rappelons quelques faits importants :

– Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
– Une copie soignée est appréciée.
– Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
– Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
– Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
– L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 10 et un écart-type de 5,4, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1

1. Bien traitée en général.
2. Une majorité des candidats sait démontrer la positivité des valeurs propres mais bien peu que les valeurs propres sont réelles (alors qu'ils ont justifié le caractère symétrique réel de la matrice B).
3. Pour la première égalité, une part très importante des candidats ne se soucie pas du problème de commutation des matrices A et ${}^tA$ (en général $(AB)^k \neq A^kB^k$) pour établir l'égalité demandée. Pour les valeurs propres possibles, les réponses sont correctes pour ceux ayant répondu à la question (i.e. ayant fait le lien avec les polynômes annulateurs essentiellement).
4. Seuls les meilleurs candidats ont traité correctement la question. La plupart des candidats confond les symboles « $\exists$ » et « $\forall$ » dans les hypothèses vérifiées par A et conclut la question en posant $k = 2$ dans l'égalité obtenue à la question précédente.

5. Une grosse moitié des candidats sait démontrer au moins l'une des quatre inclusions possibles et près de 40 % d'entre eux démontrent au moins une égalité ou deux inclusions.
6. Seuls les meilleurs candidats (10 %) ont traité correctement la question.

EXERCICE 2

1. (a) La justification de l'égalité $a = b$ a été relativement sélective. Des candidats passent d'un système à deux équations à une seule équation qui leur fournit l'égalité $a = b$. Malheureusement, ayant oublié l'autre équation, ils pensent que tous les couples (a, a) sont points critiques de f ce qui n'est pas le cas et les a induit en erreur pour le reste de la question.
   (b) Etonnament, seul un candidat sur deux traite correctement toute cette question (étude et conclusion) !
   (c) Tout aussi surprenant, un candidat sur deux ne fournit aucun argument sérieux en vu de la résolution de la question. Pour les autres candidats, la plupart démontre que f est majorée et conclut directement que f admet un maximum ce qui est faux (penser à la fonction $x \mapsto -e^x$ majorée par 0 sur $\mathbb{R}$ et 0 n'est pas atteint). La justification correcte que f n'est pas minorée n'est donnée que par une minorité de candidats.
2. La question est abordée par 70 % des candidats. Une (courte) majorité de ceux-ci obtient l'essentiel des points attribués à la question.
3. (a) La majorité des candidats parvient à établir la majoration $u_n \leqslant 1$ ... mais une partie des candidats oublie de justifier la minoration. La seconde majoration est plus sélective : elle est traitée correctement par un candidat sur cinq.
   (b) La moitié des candidats traite proprement la question, l'autre moitié ne fait rien de significatif.
   (c) Une petite majorité de candidats reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et donne la forme de a_n à l'aide du discriminant. La convergence de $(a_n)_n$ n'est pas toujours bien justifiée (affirmation de la convergence vers 0 car les racines sont $\leqslant 1$ (ou < 1) ou sont de valeur absolue strictement inférieure à 1 alors que le candidat ne les a même pas calculé ou que son affirmation est clairement fausse au vu du résultat qu'il vient d'obtenir ! La convergence de $(u_n)_n$ est traitée par les meilleurs candidats.

PROBLEME

PARTIE I : Calculs de discrétisées.

1. Un candidat sur deux sait traiter correctement cette question.
2. Bien traitée en général.

3. La notion de partie entière est mal comprise par une fraction importante de candidats. Très souvent, il est mentionné que $X_d(\Omega) = \{0, .., N\}$ sans justification et peu d'étudiants pensent à distinguer le cas $X_d = N$ ce qui amène à fréquemment à lire : $\forall k \in \{0, .., N\}, \quad P(X_d = k) = \dfrac{1}{N}$. Seuls les meilleurs candidats traitent complètement et correctement la question.
4. Une très part importante des candidats oublie de vérifier que $P(Y = k) \geqslant 0$. En général, les candidats vérifient que $\sum_{k=0}^{9} P(Y = k) = 1$ ou (exclusif en général) devinent une densité formelle f définie généralement par $f(x) = \dfrac{1}{\ln(10)\,x}$ sans préciser le domaine de validité de cette formule et sans vérifier qu'il s'agit bien d'une densité.
5. (a) Un tiers des candidats ne fournit aucun élément de réponse substantiel à la question posée. Quasiment tous les autres fournissent une réponse correcte.
   (b) Une certaine confusion règne chez une partie des candidats : certains croient qu'il s'agit d'une variable à densité, d'autres manipulent mal la partie entière, etc. Néanmoins, près de la moitié des candidats parviennent à donner la loi de la première variable.
   (c) Cette question nécessitait une réponse correcte à la question précédente ce qui entraine que seul un candidat sur quatre a fournit une réponse correcte, les autres ne traitant pas la question ou écrivant des inepties.
   (d) Les difficultés de manipulation de la partie entière se confirment car peu de candidats sont capables de répondre correctement à la première question. Seuls les meilleurs candidats concluent convenablement.

PARTIE II : Discrétisées et lois « polynômiales ».

1. Si la plupart des candidats calcule bien $u(e_k)$, seul un quart des candidats fournit une réponse approximativement correctement à l'expression de $u(e_k)$ en fonction de $e_0, .., e_n$.
2. La linéarité est bien traitée mais moins de la moitié des candidats est en mesure de répondre correctement à l'autre question.
3. Si l'argument de famille échelonnée en degré est souvent mentionné (sans véritable explication hormis un mystérieux « selon les calculs précédents»), l'énoncé précis utilisé pour conclure à la question est rarement explicité. Quant à ses hypothèses, moins d'un candidat sur trois parvient à les justifier (liberté de la famille, comparaison du cardinal de la famille à la dimension de l'espace) ... en oubliant souvent de mentionner que les vecteurs considérés $u(e_k)$ appartiennent bien à $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Seuls les meilleurs candidats parviennent à répondre correctement à la question.
5. Beaucoup de candidats n'abordent pas cette question mais ceux qui l'abordent, le font généralement bien.

6. Abordée essentiellement par les meilleurs candidats.

PARTIE III. Variables dénombrables et discrétisées.

1. La moitié des candidats répondent correctement à la question, les autres ne donnant aucun élément de réponse satisfaisant.
2. Un tiers des candidats obtient des éléments significatifs de réponse aux deux questions suivantes.
   (a) Si une part importante de candidats fait le lien avec l'inégalité des accroissements finis ou l'inégalité de Taylor, assez peu sont en mesure de formaliser correctement cette intuition (mauvaise fonction considérée, majoration étonnante de la dérivée,etc.)
   (b) Les calculs sont trop souvent formels (aucune réflexion sur la convergence des séries considérées). La continuité est justifiée par une faible part des candidats.
3. Les question b) et c) sont abordées uniquement par les meilleurs copies. Pour la question a), la première inégalité est justifiée par une grande part des candidats ... mais beaucoup moins sont en mesure de justifier la seconde (peu de soucis de convergence, écriture de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{t+k}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{t+k+1}$, élimination convenable du paramètre t).
4. Cette série de questions est abordée par une nombre très faible de candidats (moins de 20 %) mais un sur deux répond correctement au moins à la moitié des questions posées à un item donné.