# RAPPORT

## COMMENTAIRES GENERAUX

Rappelons quelques faits importants :

– Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
– Une copie soignée est appréciée.
– Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
– Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
– Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
– L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve.

Avec une moyenne de 10,2 et un écart-type de 5,5, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

## COMMENTAIRES PARTICULIERS

## EXERCICE 1

1. Question globalement bien traitée.
2. La première inégalité est souvent établie. La majoration de $f(x)$ fut plus sélective car un nombre significatif de candidats bloque sur le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{xe^t}}$, la convergence des intégrales considérées étant relativement peu mentionnée.
3. Si la minoration de $f(x) - f(y)$ est assez réussie, sa majoration l'est beaucoup moins. Bon nombre de candidats cherchent à utiliser pour cela la majoration de $f(x)$ établie à la question 2.
4. Le théorème de la bijection est souvent cité sans parler de continuité et lorsqu'elle l'est, l'argument est souvent « $f$ est continue car $x \mapsto \dfrac{1}{x+e^t}$ est continue ». Quant à la monotonie, elle est souvent justifiée de façon incorrecte par le calcul de $f'$ (via la dérivation sous le symbole intégral).

5. La plupart des candidats justifie l'existence et l'unicité du point fixe par la bijectivité de $f$. Peu de candidats sont en mesure d'introduire la bonne fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
6. (a) La valeur absolue fut souvent négligée.
   (b) Cette question fut relativement peu traitée par les candidats. Généralement, ceux qui l'abordent ne répondent que partiellement à la question (le calcul de $N$ ou bien, $N$ étant fixé, le calcul de $u_N$).
7. Une part importante de candidats se ramène à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2\,(x+h+e^t)}$.
   La majoration de cette celle-ci nécessitant un peu de finesse fut plus sélective.
8. On parle souvent de « la » primitive de $\dfrac{1}{x+1}$. La question de la constante d'intégration est rarement soulevée.

# EXERCICE 2

1. (a) q1.a. Elle est souvent réussie en exploitant la réponse donnée par l'énoncé.
   (b) Elle est bien traitée.
2. (a) La première affirmation est correctement traitée, l'inversibilité de $(2B - I_n)^2$ est justifiée mais l'inversibilité de $2B - I_n$ n'est établie que par une faible part des candidats. Rares sont les candidats cherchant les valeurs de $C_0$ et $D_0$.
   (b) Il n'est presque jamais question des matrices qui commutent.
   (c) Elle a été peu abordée et rarement achevée.

# PROBLEME

# PARTIE I

1. Correctement menée.
2. Après avoir montrer que $(f \circ g)(P)(x) = x$ pour $x \neq 1$, la plupart des candidats affirme que $f \circ g = \mathrm{Id}$.
3. Contre toute attente, la preuve de l'isomorphisme fut sélective (notamment concernant les dimensions) ainsi que l'égalité $g^{-1} = f$. Une minorité de candidats justifie sans calcul que $f$ est un endomorphisme, la plupart justifie directement que $f$ est linéaire en revenant aux définitions. Bien entendu, ils mentionnent rarement le degré de $f(P)$ et quasiment aucun ne vérifie que $f(P)$ est bien un polynôme.
4. De très grandes difficultés pour cette question classique.Si la matrice $B$ est obtenue par une fraction importante des candidats, bien peu son en mesure de proposer la matrice $A$ (très souvent, les coefficients de celle-ci dépendent de $x$).

5. Dans un nombre important de copies, il a confusion entre diagonalisabilité et inversibilité : « puisque les valeurs propres sont non nulles, les endomorphismes f et g sont diagonalisables ».

## PARTIE II

1. Elle est traitée par beaucoup de candidats en « bricolant » autour de la réponse de l'énoncé, peu de réponses satisfaisantes tant du point vue du choix du système complet d'événements « $\left\{(Z_k = i)\,, \quad \boxed{r \leqslant i \leqslant n}\right\}$» que de la justification correcte des probabilités conditionnelles.
2. Elle est correctement traitée.
3. La somme $S_n$ est souvent calculée en calculant explicitement $S_n$ et en utilisant les sommes de séries géométriques. La constante de la suite $(rS_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1}$ est justifiée par les candidats sachant manipuler avec aisance les symboles de sommation.
4. Cette question est sélective car elle demande une certaine aisance dans la manipulation des symboles de sommation.
5. (a) Correctement traitée même si le théorème de transfert est assez peu mentionné.
   (b) Certains candidats parviennent aux formules de récurrence. Malheureusement, ils fournissent pas toujours l'expression explicite de $F_k'(1)$ et $F_k''(1)$ .
   (c) Seuls les meilleurs candidats l'abordent et la réussissent.

## PARTIE III

1. Peu de candidats parviennent à établir la seconde égalité proposée.
2. L'argumentation est généralement correcte pour ceux ayant abordé la question.
3. Si le calcul de $f(u_r)$ est correct, peu de candidats observent alors un vecteur propre et encore moins en déduisent un argumentaire de diagonalisabilité.
4. Etonnament, peu de candidats observent qu'il s'agit simplement de la formule du binôme.
5. Seules les meilleures copies fournissent une réponse convenable.
6. Peu traitée.
7. (a) Seules les meilleures copies répondent correctement.
   (b) Question peu abordée mais lorsqu'elle l'est, elle est correctement traitée.