ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2011

3

Mathématiques

Option Technologique

Mercredi 20 avril 2011 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps" :
8h00 – 13h20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 6 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1.

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad f(x) = e^x - e^{-x}$$

et la résolution d'une équation. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. (a) Donner le domaine de définition de f et étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

   (b) Donner les valeurs suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

2. (a) Calculer $f'(x)$ pour x réel.

   (b) Construire le tableau de variation de f.

   (c) Après avoir calculé $f(0)$, déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.

   (d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. On note cette droite T.

3. (a) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion que l'on précisera et étudier la convexité de f.

   (b) Construire sur un même schéma $\mathcal{C}_f$ et T.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère dans cette question à l'équation (E_n) d'inconnue x : $f(x) = n$.

   (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution notée u_n (*on ne cherchera pas ici à calculer* u_n).

   Préciser la valeur de u_0.

   (b) Soit n un entier naturel non nul, calculer $f(\ln(n))$ et en déduire que $u_n \geqslant \ln(n)$.

   Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

   (c) Soit n un entier naturel. Montrer que l'équation : $x^2 - nx - 1 = 0$ admet deux solutions réelles que l'on déterminera et dont on précisera les signes.

   (d) A l'aide du changement de variable $t = e^x$, déterminer la solution u_n de (E_n) pour n entier naturel.

EXERCICE 2.

PARTIE I.

On considère les matrices :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et on pose : } A = \Delta + N.$$

1. Calculer N^2 puis en déduire N^k où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. (a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

   (b) Vérifier que : $P^{-1}\Delta P = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) Exprimer Δ en fonction de P, D et P^{-1}.

   (d) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^n = PD^nP^{-1}$.

   (e) Exprimer Δ^n sous la forme d'un tableau de nombres.

3. (a) Vérifier que : $\Delta N = N\Delta$.

   (b) En utilisant la formule du binôme de Newton pour les matrices, exprimer A^n en fonction de Δ, N et n.

   (c) En déduire l'expression de A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

PARTIE II.

Dans cette partie, nous allons étudier les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$$

1. (a) En utilisant la définition de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer directement la valeur de z_n.

   (b) Ecrire alors x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n.

2. On introduit la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $r_n = x_n + y_n$ pour tout entier naturel n.

Tournez la page s.v.p.

(a) Etablir que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et préciser sa raison.

(b) En déduire l'expression de $x_n + y_n$ en fonction de n.

3. On introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = 2x_n + y_n$ pour tout entier naturel n.

(a) Prouver que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.

(b) En déduire l'expression de $2x_n + y_n$ en fonction de n.

4. En utilisant les questions 2 et 3, déterminer x_n et y_n en fonction de n.

EXERCICE 3.

Dans cet exercice, on étudie quelques situations probabilistes liées à un standard téléphonique d'un service après-vente. Le standard de ce service après-vente reçoit deux types d'appels : les appels concernant le petit électroménager et les appels concernant les appareils audio et vidéo.

Lors d'un appel, le problème est soit résolu directement par téléphone, soit il nécessite l'intervention d'un technicien. On considère les événements suivants :

- E : « un appel concerne le petit électroménager ».
- A : « un appel concerne les appareils audio-vidéo »
- T : « le problème posé se résout directement par téléphone »

De plus des études ont permis d'établir les résultats suivants :
(H_1) Le standard reçoit 20 % d'appels concernant le petit électroménager et 80 % d'appels concernant les appareils audio et vidéo.

(H_2) Lorsqu'un appel concerne le petit électroménager, la probabilité pour que le problème soit résolu par téléphone est de $0,5$.

(H_3) Lorsqu'un appel concerne un appareil audio-vidéo, la probabilité pour que le problème soit résolu par téléphone est de $0,375$.

On supposera enfin les appels indépendants les uns des autres.

Partie I.

1. (a) Traduire en terme de probabilité les données (H_1), (H_2) et (H_3).
   (b) Montrer que $P(T) = 0,4$.
   (c) On suppose qu'une personne appelant le standard a vu son problème résolu directement par téléphone, calculer la probabilité pour que le problème posé concerne un petit électroménager.

2. Un standardiste reçoit 10 appels dans l'heure, on note X la variable aléatoire représentant le nombre d'appels concernant du petit électroménager.

   (a) Déterminer la loi de X : on donnera les valeurs prises par X ainsi que, pour chacune d'elles, la probabilité correspondante.
   (b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

3. Pendant une période de 10 jours, un standardiste reçoit 600 appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre d'appels résolus directement par téléphone.

   (a) Donner la loi de Y.

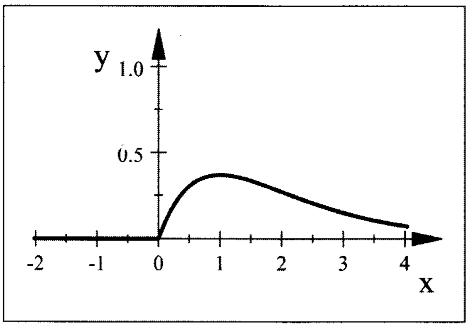
   On admet dans la suite de cette partie que l'on peut approcher la loi de Y par une loi normale.
   (b) Déterminer les paramètres de cette loi normale.
   (c) En utilisant cette approximation, déterminer une valeur approchée de la probabilité $P(Y \leqslant 252)$. (*On utilisera la table de loi normale ci-jointe*)

Partie II.

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = xe^{-x} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

De plus, on donne ci-dessous la représentation graphique de f



Tournez la page s.v.p.

1. (a) A l'aide d'une intégration par parties, donner la valeur de l'intégrale $\int_0^A xe^{-x}dx$ puis calculer :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A xe^{-x}dx.$$

   (b) Que peut-on en déduire pour l'intégrale impropre : $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$?

2. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire.

3. On suppose que lors d'un appel au standard, le temps de celui-ci en minutes est une variable aléatoire M à densité dont une densité est f.

   (a) Déterminer F la fonction de répartition de la variable aléatoire M.
   (b) Calculer les probabilités suivantes : (i) $P(M \leqslant 4)$, (ii) $P(2 \leqslant M \leqslant 4)$, (iii) $P_{(M\geqslant 2)}(M \leqslant 4)$.

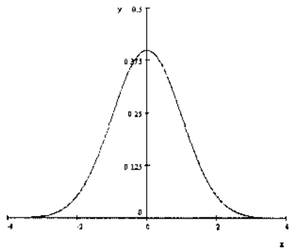
4. Montrer que la variable aléatoire M admet une espérance et que cette espérance vaut 2.

5. On suppose que le prix payé par le client en euro pour un appel est une variable aléatoire Z qui est calculée de la façon suivante : $Z = 1 + 0,2M$.

   Quel est le coût moyen d'un appel pour un client ?

écricome

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE



La table ci-après donne les valeurs de $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ pour x positif. Exemple : pour $x = 1,37$ on a : $F(x) = 0,9147$.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0.758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0.8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0.9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0.9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0.9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986