RAPPORT

COMMENTAIRES GENERAUX

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et / ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraissemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Les questions informatiques sont désormais abordées par la moitié des candidats et, généralement, elles sont traitées correctement. Rappelons que ces questions sont assez largement valorisées au sein du barême de l'épreuve.

Avec une moyenne de 10,4 et un écart-type de 5,1, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

COMMENTAIRES PARTICULIERS

EXERCICE 1.

L'exercice (ainsi que les questions non mentionnées ci-dessous) a été convenablement réussi par une part importante des candidats.

A la question 1.b), la relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$ est devinée par une petite minorité de candidats et seuls les meilleurs candidats parviennent à la justifier correctement.

A la question 1.c), l'existence des coefficients a_k est justifiée par de nombreux candidats mais peu d'entre eux percoivent la stratégie à mener pour obtenir la seconde égalité : dériver j fois, évaluer en j, manipuler convenablement les indices avec soin puis déterminer correctement la valeur de $P_k^{(j)}(j)$. Seules les bonnes copies constatent que lorsque $j > k$, $P_k^{(j)}$ est le polynôme nul pour des raisons de degré.

La question 2.c) fut très discriminante. Beaucoup de candidats devinent la bonne valeur du rang mais assez peu de candidats sont capables d'apporter une réponse argumentée et correcte. De façon assez surprenante, il en est de même des valeurs propres alors que la matrice concernée est triangulaire.

La question 3.a) est abordée par 90 % des candidats et la définition du produit scalaire est largement connue des candidats. Par contre, la vérification du caractère défini positif a la plupart du temps échoué faute de précision et de réflexion véritable. Les bonnes copies ne s'y sont pas laissées prendre et ont utilisé la question 1.c). Inversement la justification « une somme de termes positifs ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls » est trop souvent absente des copies.

Pour finir, la question 3.b) est bien moins souvent abordée. Elle l'est avec succès parfois lorsque le candidat avait bien compris les questions 1.b) et 1.c).

EXERCICE 2.

Cet exercice fut particulièrement sélectif. Les questions 1,2 et 5 furent abordées par plus des deux tiers des candidats.

Il est surprenant de constater qu'assez peu de candidats savent justifier correctement le signe de $t \mapsto t^2 - t + 1$ sur $\mathbb{R}$ à la question 1 et une partie importante des candidats ne donne pas le signe correct de ψ sachant sa monotonie sur $\mathbb{R}_+^*$ et le fait que $\psi(1) = 0$.

A la question 2, si plus de la moitié des candidats a répondu correctement à la question mais près d'un tiers des candidats n'a su justifier ni la convergence, ni imaginer (ou établir) la valeur de la somme. La question 3 était inaccessible sans la réponse à la question 2 et, presque réciproquement, les candidats ayant répondu correctement à la question 2 ont obtenu la réponse convenable à la question 3.

A la question 5, si la définition des points critiques et le calcul des dérivées partielles sont corrects, moins de la moitié des candidats parvient à obtenir au moins l'une des trois relations voulues. Cela demande une certaine maitrise des calculs. Les conditions $x > 1$ et $y > 1$ ne sont obtenues que par les meilleurs candidats et les réciproques n'ont quasiment jamais été traitées.

Les autres questions sont traitées plus ou moins avec bonheur par une petite fraction des candidats (moins d'un quart).

PROBLEME.

PARTIE I. Etude des variables Y_n et Z_n.

Les questions informatiques ont été abordées par un nombre croissant de candidats (près de 50 % d'entre eux) et avec un succès lui aussi croissant (près de la moitié des points attribués à ces questions sont obtenus par les candidats ... les ayant abordées !). Rappelons néanmoins que pour déterminer le maximum d'un tableau, il ne s'agit pas de comparer chaque élément du tableau avec son voisin, mais de créer une variable contenant le maximum provisoire. C'est cette variable qu'on compare successivement aux éléments du tableau et qu'on met à jour dans la boucle.

Si le calcul des fonctions de répartition et des densités est généralement correct, les hypotèses précises pour qu'une fonction soit la fonction de répartition d'une variable à densité, ou pour qu'une fonction soit la densité d'une variable aléatoire, ne sont en général pas assez connues.

Malgré l'indication de la question 5, assez peu de candidats pensent à mobiliser leurs connaissances sur le produit de convolution notamment de l'invoquer sans parler de l'indépendance entre les variables Z_n et $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

La question 4 est peu réussie.

PARTIE II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

Si la question 1.a) est bien traitée par un grand nombre de candidats, seuls les meilleurs d'entre eux parviennent à répondre correctement à la question 1.b).

Pour la question 2, les hypothèses classiques pour les fonctions intégrables sont rarement toutes vérifiées notamment la continuité. Pour l'obtention d'une domination de fonction $t \mapsto$

$\exp(-t)\, f(t)$, une part importante des candidats s'est basée sur l'une des deux assertions suivantes (qui sont toutes deux fausses) :

- «le produit de deux fonctions intégrables est intégrable»
- «une fonction intégrable au voisinage de l'infini tend forcément vers 0 au voisinage de l'infini».

La question 3 a posé beaucoup de problèmes. Une quantité non négligeable de candidats introduit une primitive de $G : t \mapsto \exp(-t)\, f(t)$ (ce qui est une bonne chose), commettent l'erreur classique : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t)\, f(t) dt = G(x) - \lim_{+\infty} G$ puis ils affirment que la dérivée de $x \mapsto G(x) - \lim\limits_{+\infty} G$ est la fonction $x \mapsto G'(x) - \lim\limits_{+\infty} G'$ (ce qui est une mauvaise chose).

La question 4 est assez peu réussie sauf la relation (β) et le passage formel à la limite quand $A \to +\infty$.

Les questions suivantes sont abordées par une nombre très faible de candidats.

PARTIE III. Etude de l'application $f \mapsto k_f$.

La question 1 est réussie par un grand nombre de candidats. Pour la question 2, la majorité des candidats abordant la question (50 %) calcule l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-t} dt$ mais seule une faible fraction des candidats détermine l'espace propre auquel appartient f_a et le fait que f_a ne soit pas le vecteur nul est rarement mentionnée. Les autres questions sont assez peu abordées.