

3

# Mathématiques

Option Technologique

■ Mercredi 21 avril 2010 de 8h00 à 12h00

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":  
8 h 00 – 13 h 20*

Aucun document n'est autorisé.  
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

*Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.*

## EXERCICE 1

On considère les matrices  $M$  et  $P$  suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### I. Réduction de la matrice $M$ et calcul de $M^n$ .

1. Prouver que la matrice  $P$  est inversible et donner les neuf coefficients de la matrice inverse  $P^{-1}$ .
2. Calculer la matrice  $T$  définie par :  $T = P^{-1}MP$ .
3. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :

$$M^n = PT^nP^{-1}.$$

5. En déduire l'expression de la matrice  $M^n$  sous la forme d'un tableau de nombres.

### II. Etude d'une suite récurrente linéaire.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = -1, & u_2 = 0. \\ \text{Pour tout entier naturel } n : & u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n. \end{cases}$$

1. Calculer  $u_3$  et  $u_4$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la matrice colonne :  $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$V_{n+1} = MV_n.$$

3. Etablir, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :

$$V_n = M^n V_0.$$

4. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

## EXERCICE 2

Dans cet exercice, on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^{-x}.$$

### I. Etude de la fonction $f$ .

On note  $C$  la courbe représentative de  $f$ .

1. (a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Que peut-on en déduire pour  $C$  ?  
 (b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Que peut-on en déduire pour  $C$  ?
2. (a) Pour tout réel  $x$ , calculer  $f'(x)$  et construire le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 (b) Soit  $D$  la tangente à la courbe  $C$  au point d'abscisse 0.  
 Donner une équation de la droite  $D$ .  
 (c) Etudier la convexité de  $f$ .
3. Tracer sur un même schéma  $C$  et  $D$  (valeur numérique :  $e^{-1} \approx 0,4$ ).

### II. Etude d'une famille d'équations.

Dans cette partie on s'intéresse aux solutions positives ou nulles (si elles existent) de l'équation

$$(E_n) : f(x) = x^n$$

où  $n$  désigne un entier naturel non nul.

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}_+$  l'équation  $(E_1)$ .
2. Pour  $n$  entier naturel avec  $n \geq 2$ , on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(x) = e^{-x} - x^{n-1}.$$

- (a) Montrer que  $g_n$  est une fonction strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$ .
- (b) En déduire que l'équation  $g_n(x) = 0$  admet une unique solution sur  $[0, +\infty[$ .  
 On note cette solution  $\alpha_n$ .
- (c) Montrer que :  $\forall n \geq 2, \quad \alpha_n \in ]0, 1[$ .
- (d) Donner, pour  $n \geq 2$ , l'ensemble des solutions positives de l'équation  $(E_n)$ .

### III. Etude d'une variable aléatoire à densité.

Dans cette partie on considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

1. Pour  $x \in \mathbb{R}_+$ , calculer l'intégrale :  $\int_0^x f(t) dt$ .
2. Montrer que la fonction  $h$  est une densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$ .
3. On note  $H$  la fonction de répartition de  $X$ . Déterminer la fonction  $H$ .
4. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X \leq 1), \quad P(1 \leq X \leq 2) \quad \text{et} \quad P_{(X \leq 2)}(X \geq 1).$$

## EXERCICE 3

Cet exercice étudie deux jeux de dés avec des dés équilibrés à six faces.

### I. Etude du premier jeu :

Dans ce jeu on lance simultanément deux dés équilibrés, si les deux dés donnent le même résultat alors le joueur marque 1 point, sinon il ne marque pas de point.

1. Calculer la probabilité  $p$  de l'événement  $A$  : « Les deux dés donnent le même résultat ».
2. Le joueur répète  $n$  fois le même jeu et on note alors  $Y_n$  le nombre de points obtenus par le joueur après ces  $n$  parties.
  - (a) Reconnaître la loi de  $Y_n$  (*une justification soignée est attendue*).  
Donner explicitement  $P(Y_n = k)$  pour les valeurs  $k$  prises par  $Y_n$ .
  - (b) Donner la valeur de l'espérance  $E(Y_n)$  de la variable aléatoire  $Y_n$  et sa variance  $V(Y_n)$ .

3. Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il marque un point pour la première fois.

On note alors  $Z$  la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur.

- (a) Reconnaître la loi de  $Z$  (*une justification soignée est attendue*).

Donner explicitement  $P(Z = k)$  pour les valeurs  $k$  prises par  $Z$ .

- (b) Donner la valeur de l'espérance  $E(Z)$  de la variable aléatoire  $Z$  et sa variance  $V(Z)$ .

## II. Etude d'un deuxième jeu.

Dans ce jeu, on lance successivement deux dés équilibrés.

On note :

- $D_1$  le résultat du premier dé et  $D_2$  le résultat du deuxième dé,
- $E_1$  l'événement : « $D_1 < D_2$ »,  $E_2$  l'événement : « $D_1 = D_2$ »  
et  $E_3$  l'événement : « $D_1 > D_2$ ».

Lors d'une partie,

- si l'événement  $E_1$  se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement  $E_2$  se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement  $E_3$  se produit alors le joueur marque 1 point.

Le joueur répète  $n$  fois ce jeu. Pour tout entier naturel  $i \geq 1$ , on note :

- $X_i$  la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la  $i^{\text{ème}}$  partie ;
- $S_i$  le nombre total de points marqués après  $i$  parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  (*On démontrera notamment que  $P(E_1) = P(E_3) = \frac{5}{12}$* ).
2. Soit  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , déterminer la loi de la variable aléatoire  $X_i$  puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire  $S_1$ .
4. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire  $S_2$  et donner sa loi.

5. (a) Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire  $S_3$ .
- (b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple  $(S_2, S_3)$ .  
*On justifiera précisément une valeur non nulle de ce tableau, les autres pouvant être données directement.*
- (c) En déduire la loi de la variable aléatoire  $S_3$ .
6. (a) Ecrire  $S_n$  en fonction des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .  
En déduire l'espérance mathématique  $E(S_n)$  de  $S_n$ .
- (b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

