

1

Mathématiques

Option Scientifique

■ **Mercredi 21 avril 2010 de 8h00 à 12h00**

Durée : 4 heures

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":
8 h 00 – 13 h 20*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 9 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

EXERCICE 1

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les intégrales :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u} du.$$

1. Convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

(a) Vérifier que :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall t \in [0, 1[, \quad \frac{1}{1+t+t^2+\dots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$

En déduire que : $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}$.

Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$?

(b) En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.$$

2. Résultats intermédiaires.

(a) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln(x))^k}{x-1}$.

(b) Soit k un entier naturel non nul.

Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{(\ln(x))^k}{x-1} dx$.

(c) On introduit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - e^{2x}$.

A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1 appliquée à la fonction f , montrer que :

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad |e^x - e^{2x} + x| \leq \frac{3x^2}{2}.$$

3. Application.

(a) En utilisant la question 2, démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad \left| v_n + \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du \right| \leq \frac{3}{2n^2} \int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u} du.$$

(b) On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

Donner alors un équivalent de v_n puis un équivalent de $u_n - \frac{1}{2}$ en fonction de I .

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n , on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n . On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme :

$$f(P) = P'' - 4XP'.$$

1. Etude de f . Soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.

(a) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Calculer $f(1)$, $f(X)$ puis $f(X^k)$ pour $k \in \{2, \dots, n\}$.

Etablir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire.

(c) Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres est de dimension 1.

(d) Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

Etablir que : $\lambda = -4 \deg(P)$.

En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que

$$(\mathcal{E}_n) : f(H_n) = -4nH_n.$$

Rappel : un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.

2. Etude de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (a) En dérivant la relation (\mathcal{E}_n) , démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad f(H'_n) = -4(n-1)H'_n.$$

En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad H'_n = nH_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0.$$

- (b) Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$?

Calculer alors H_2 et H_3 .

- (c) D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}.$$

Ecrire un programme en Pascal calculant u_{2010} .

3. Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.

On note U l'ouvert de \mathbb{R}^3 défini par :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{tel que } x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } z \neq x\}$$

ainsi que la fonction V définie sur U par :

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|.$$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$.

- (a) Etablir que (α, β, γ) est un point critique de V si et seulement si (α, β, γ) est solution du système :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2\alpha(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta) = 2\alpha - \beta - \gamma \\ 2\beta(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) = 2\beta - \alpha - \gamma \\ 2\gamma(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) = 2\gamma - \alpha - \beta \end{cases}$$

- (b) On introduit le polynôme $Q(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$.

Montrer que (α, β, γ) est solution de (\mathcal{S}) si et seulement si $Q'' - 4XQ'$ admet pour racines α, β, γ .

- (c) Prouver que si (α, β, γ) est un point critique de V alors

$$Q'' - 4XQ' = -12Q$$

puis que $Q = H_3$ (cf. question 2.b).

Donner alors les points critiques de V .

PROBLEME

Soit r un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient r boules numérotées $1, 2, \dots, r$. On pioche indéfiniment les boules avec remise, chaque boule pouvant être piochée de façon équiprobable.

Pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on note Y_i la variable aléatoire égale au « nombre de pioches nécessaires pour obtenir i boules distinctes ». On convient que $Y_1 = 1$.

On désigne par X_r la variable aléatoire égale au « nombre de pioches nécessaires pour obtenir les r boules numérotées $1, 2, \dots, r$ ». Il est immédiat que $X_r = Y_r$.

Par exemple, en supposant que $r = 4$, si les boules piochées successivement portent les numéros :

3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 4, 1, ...

alors on a : $Y_1 = 1, Y_2 = 4, Y_3 = 8, Y_4 = X_4 = 11$.

La partie **I** établit certains résultats préliminaires qui seront utilisés dans d'autres parties.

La partie **II** se consacre à l'étude de la loi des variables discrètes $Y_{i+1} - Y_i$ afin d'en déduire l'espérance et la variance de la variable discrète X_r .

La partie **III** détermine la loi de la variable X_r puis étudie la distribution asymptotique de la variable X_r autour de sa moyenne.

On note \exp la fonction exponentielle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x.$$

PARTIE I : Résultats préliminaires.

1. Etude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1, \quad u_n = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) - \ln(n)$.

(a) Ecrire un programme Pascal permettant de calculer u_n pour un entier $n \geq 1$ donné.

(b) A l'aide d'un développement limité, justifier que $u_n - u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (u_n - u_{n+1})$ puis démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Tournez la page s.v.p.

- (c) Montrer que la suite $\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}\right)_{n \geq 1}$ converge (on ne demande pas le calcul de la limite).

2. Loi de Gumbel.

Soit Z une variable aléatoire continue. On suppose que Z suit la loi de Gumbel, c'est-à-dire que sa fonction de répartition F_Z est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Z(t) = \exp(-\exp(-t)).$$

- (a) Vérifier que la fonction F_Z est bien une fonction de répartition puis que Z possède une densité que l'on précisera.
- (b) On considère la variable aléatoire $W = \exp(-Z)$.

Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire W .

En déduire que la variable aléatoire W suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres.

- (c) Pour tout entier k , montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln(x))^k e^{-x} dx$ est absolument convergente.
- (d) En justifiant le changement de variable $x = \exp(-t)$, démontrer que la variable Z admet un moment d'ordre k valant :

$$E(Z^k) = \int_0^{+\infty} (-\ln(x))^k e^{-x} dx.$$

PARTIE II : Etude de la variable X_r

1. Etude du cas $r = 3$.

On suppose uniquement dans cette question que $r = 3$, c'est-à-dire que l'urne ne contient que trois boules numérotées respectivement 1, 2, 3 chacune pouvant être piochée avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

- (a) Soit n un entier naturel non nul.

Comparer les événements $(Y_2 > n)$ et C_n : «les n premières pioches fournissent des boules portant toutes le même numéro».

Calculer la probabilité $P(C_n)$. En déduire la probabilité $P(Y_2 > n)$ puis donner la loi de la variable Y_2 .

(b) Justifier que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k])$$

puis que :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall k \geq 2, \quad P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k]) = \frac{1}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

En déduire la loi de la variable $Y_3 - Y_2$.

Dans toute la suite du problème, r désignera un entier supérieur ou égal à 2.

2. Loi de $Y_{i+1} - Y_i$ pour $i \in \{1, 2, \dots, r-1\}$.

(a) Justifier que :

$$Y_i(\Omega) = \{i, i+1, i+2, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \dots, i-1\} \quad \text{et} \quad (Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

(b) Démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall k \geq i, \quad P_{(Y_i=k)}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

(c) En déduire que $Y_{i+1} - Y_i$ suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres puis établir que :

$$E(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r}{r-i} \quad \text{et} \quad V(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r \cdot i}{(r-i)^2}.$$

3. Espérance et variance de X_r .

(a) Justifier que : $X_r = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} (Y_{r-i+1} - Y_{r-i})$.

En admettant que les variables $Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, \dots, Y_r - Y_{r-1}$ sont indépendantes, vérifier que :

$$E(X_r) = r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i} \quad \text{et} \quad V(X_r) = r^2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{i^2} - r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i}.$$

(b) A l'aide de la question **I.1**, prouver l'existence de deux réels α et β tels que :

$$E(X_r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} r \ln(r) + \alpha r + o(r) \quad \text{et} \quad V(X_r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \beta r^2.$$

PARTIE III : Loi de X_r et de sa déviation asymptotique par rapport à sa moyenne.

Pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ et tout entier naturel $m \geq 1$, on considère l'événement $A_{k,m}$: «le numéro k n'a pas été pioché durant les m premières pioches».

1. Loi de X_r .

Soit m un entier naturel non nul.

- (a) Pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, calculer successivement :
- la probabilité de l'événement $A_{k,m}$,
 - la probabilité de l'événement « k numéros n'ont pas été piochés au cours des m premières pioches».
- (b) Justifier que :

$$P(X_r > m) = P(A_{1,m} \cup A_{2,m} \cup \dots \cup A_{r,m})$$

puis, en utilisant la formule du crible de Poincaré, démontrer que :

$$\begin{aligned} P(X_r > m) &= \binom{r}{1} \left(1 - \frac{1}{r}\right)^m - \binom{r}{2} \left(1 - \frac{2}{r}\right)^m + \dots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r} \left(1 - \frac{r}{r}\right)^m \\ &= \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^m. \end{aligned}$$

En déduire la loi de X_r .

2. Comportement de X_r au delà de sa moyenne.

- (a) A l'aide d'une récurrence sur m , montrer que, pour toute famille (D_1, \dots, D_m) d'événements, on a :

$$P(D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_m) \leq P(D_1) + P(D_2) + \dots + P(D_m).$$

- (b) Démontrer que pour tout réel x , on a : $\exp(x) \geq 1 + x$. En déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, r\}, \quad P(A_{k,m}) \leq \exp\left(-\frac{m}{r}\right).$$

- (c) Soit $\varepsilon > 0$, on note M_r la partie entière de $(1 + \varepsilon)r \ln(r)$, c'est-à-dire l'unique entier relatif tel que :

$$M_r \leq (1 + \varepsilon)r \ln(r) < M_r + 1.$$

Comparer les événements « $(X_r > M_r)$ » et « $(X_r > (1 + \varepsilon) r \ln(r))$ ». En déduire que :

$$P(X_r > (1 + \varepsilon) r \ln(r)) \leq \frac{e}{r^\varepsilon}.$$

Ainsi on vient d'établir que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} P(X_r > (1 + \varepsilon) r \ln(r)) = 0$$

qui peut se traduire ainsi : l'événement « X_r est significativement supérieur à sa moyenne » est un événement asymptotiquement rare.

3. Distribution de X_r autour de sa moyenne.

On introduit la suite $(Z_r)_{r \geq 2}$ de variables aléatoires définie par :

$$\forall r \geq 2, \quad Z_r = \frac{X_r - r \ln(r)}{r}.$$

Soit t un réel fixé, on note m_r la partie entière du réel $r \ln(r) + rt$, c'est-à-dire l'unique entier relatif tel que :

$$m_r \leq r \ln(r) + rt < m_r + 1.$$

(a) Justifier l'existence d'un rang $r_0(t)$ tel que :

$$\forall r \geq r_0(t), \quad m_r \geq 1$$

puis prouver l'égalité :

$$\forall r \geq r_0(t), \quad P(Z_r > t) = P(X_r > m_r).$$

(b) Soit k un entier naturel. A l'aide d'un développement limité, établir que :

$$m_r \ln \left(1 - \frac{k}{r} \right) \underset{r \rightarrow +\infty}{=} -k \ln(r) - kt + o(1)$$

(c) Démontrer que, pour tout entier k , on a : $\binom{r}{k} \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}$.

En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r} \right)^{m_r} = \frac{\exp(-kt)}{k!}.$$

(d) En admettant que l'on a :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\exp(-kt)}{k!},$$

exprimer la valeur de la limite $\lim_{r \rightarrow +\infty} P(Z_r \leq t)$ en fonction de $F_Z(t)$ (définie à la question **I.2**).

Quel résultat vient-on d'établir sur la suite de variables aléatoires $(Z_r)_{r \geq 2}$?

