ēcricome

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et I_n désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

1. Dans cette question uniquement, on considère que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et que $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer AB et BA.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de AB et de BA.

Soit A et B deux matrices quelconques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit λ une valeur propre non nulle de AB et X un vecteur propre associé.
   (a) Justifier que $BX \neq 0$.
   (b) Montrer que BX est un vecteur propre de BA et que λ est une valeur propre de BA.
3. Supposons que 0 est une valeur propre de AB et X un vecteur propre associé.
   (a) Supposons que B est inversible.
   Justifier que $BX \neq 0$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA.
   (b) Supposons que B n'est pas inversible.
   Montrer que $\text{rg}(BA) < n$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA.
4. Montrer que AB et BA ont le même spectre.
5. Les matrices AB et BA ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?

Partie 2

On considère A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes.
Soit B une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$.

6. Supposons qu'il existe un n-uplet de réels non tous nuls $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$.
   (a) Justifier que A admet un polynôme annulateur non nul Q de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   (b) En étudiant les racines de ce polynôme Q annulateur de A, aboutir à une contradiction.
   (c) Que peut-on déduire sur la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$?
7. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
   (a) Justifier que l'espace propre de A associé à la valeur propre λ est l'espace vectoriel engendré par X.
   (b) Exprimer de deux manières différentes BAX.
   (c) En déduire que $BX \in \text{Vect}(X)$.
8. Déduire que tout vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B.
9. (a) Justifier qu'il existe une base $(X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A et de B telle que :
   $$\forall i \in [\![1, n]\!], \ AX_i = \lambda_i X_i.$$
   (b) Pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, on note μ_i le réel tel que $BX_i = \mu_i X_i$.
   Montrer que $\text{Sp}(AB) = \{\lambda_i \mu_i, \ i \in [\![1, n]\!]\}$.

10. On rappelle que le seul polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ ayant n racines deux à deux distinctes est le polynôme nul.
    (a) Montrer que l'application $P \mapsto \big(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)\big)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$.
    (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ vérifiant
    $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ BX_i = P(\lambda_i)X_i.$$
    (c) Montrer que $B = P(A)$.
11. (a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AB = BA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
    (b) Montrer que $\mathscr{C}(A) = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}$.
    (c) À l'aide de la question 6, déterminer la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on considère que $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et que la norme associée au produit scalaire usuel est notée $\| \cdot \|$.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, symétrique dont les valeurs propres notées $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ vérifient
$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Enfin, on considère un vecteur $u = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle.$$

1. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note alors f^{-1} la réciproque de f.
2. (a) Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique.
   (b) Exprimer ${}^tA$ en fonction de A.
   (c) En déduire qu'il existe une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.
   (d) Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1\|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_n\|x\|^2$.
   (e) Montrer que $\langle f(x), x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.
3. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Exprimer $g(x)$ en fonction des x_i, $a_{i,j}$ et u_i.
   (b) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et préciser $\partial_1 g(x)$.
   (c) Vérifier que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$:
   $$\nabla g(x) = f(x) - u.$$
4. Montrer que g admet un unique point critique m de $\mathbb{R}^n$ et que $m = f^{-1}(u)$.
5. Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$:
   $$\frac{1}{2}\langle f(x-m), x-m\rangle = g(x) - g(m).$$
6. Que peut-on en déduire au sujet du point m, vis-à-vis de g ?

On considère un réel α de $\left]0, \dfrac{1}{\lambda_n}\right]$ et un vecteur m_0 de $\mathbb{R}^n$, et l'on définit par récurrence des vecteurs m_p de $\mathbb{R}^n$ par :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ m_{p+1} = m_p - \alpha \nabla g(m_p).$$

7. Soit a, h deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que
   $$\langle f(a+h), a+h\rangle = \langle f(a), a\rangle + 2\langle f(a), h\rangle + \langle f(h), h\rangle.$$

Tournez la page s.v.p.

(b) En déduire que

$$g(a+h) = g(a) + \langle \nabla g(a), h \rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h \rangle.$$

8. (a) En appliquant cette égalité à des vecteurs a, h bien choisis, montrer que pour tout entier naturel p :

$$g(m_{p+1}) = g(m_p) - \alpha \left\| \nabla g(m_p) \right\|^2 + \frac{\alpha^2}{2}\langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p) \rangle$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel p :

$$g(m_{p+1}) \leqslant g(m_p) - \alpha \left(1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2}\right) \left\| \nabla g(m_p) \right\|^2.$$

9. (a) Montrer que la suite $\left(g(m_p)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

On admet que $\left(g(m_p)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(m)$, où m a été défini à la question 4.

(b) Montrer que pour tout entier naturel p,

$$\|m_p - m\|^2 \leqslant \frac{2}{\lambda_1}\left(g(m_p) - g(m)\right).$$

(c) En déduire que $\lim\limits_{p \to +\infty} \|m_p - m\| = 0$.

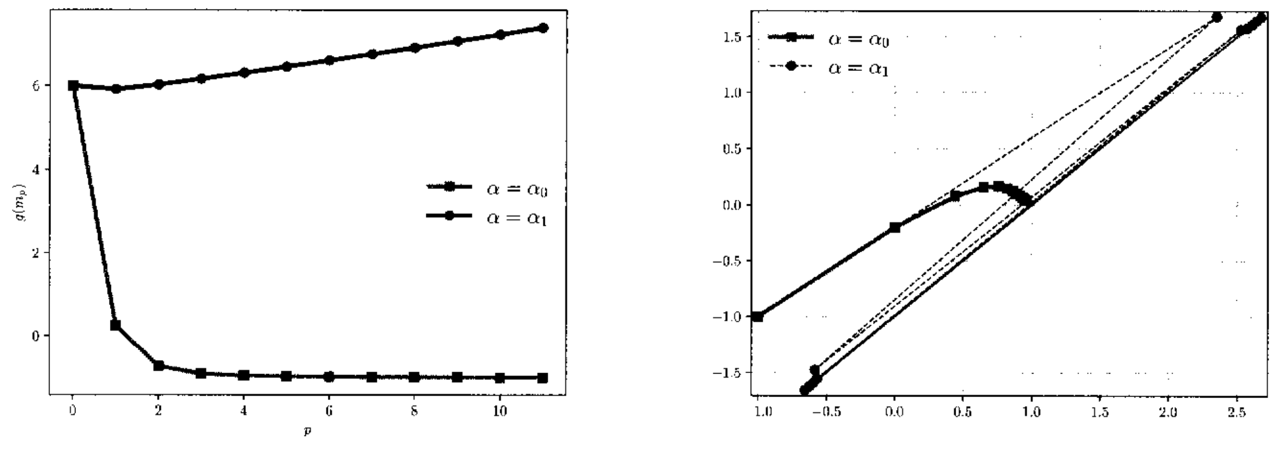
10. Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et que $u = (2, 1)$ et

$$f : (x, y) \longmapsto (2x + y, x + 2y).$$

(a) Vérifier que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$.

Dans la figure 1, on a représenté l'évolution des suites $\left(g(m_p)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ en prenant deux paramètres différents ($\alpha_0 = 0,2$ et $\alpha_1 = 0,67$).

Dans la figure de gauche, on représente l'évolution de $g(m_p)$ en fonction de p, et dans la figure de droite on a représenté l'évolution de points m_p dans le plan, en reliant les points successifs.



(a) Évolution de $g(m_p)$ en fonction de p

(b) Évolution des points m_p

FIGURE 1 – Deux descentes de gradient, pour deux valeurs de α différentes.

(b) Commenter ces courbes, et déterminer qualitativement lequel des deux α ne vérifie pas les hypothèses de l'énoncé (il n'y en a qu'un seul).

(c) Conjecturer la valeur de m, sachant que m est à coordonnées entières.

(d) Vérifier que les conditions de l'énoncé sont bien vérifiées, et que les résultats expérimentaux sont en adéquation avec ce qui a été démontré dans les questions précédentes.

Problème

Partie 1

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction
$$F : x \longmapsto \frac{e^x}{1+e^x}.$$

1. La librairie Numpy est importée sous la dénomination np.
   Écrire une fonction en langage Python nommée F prenant en argument un réel x et renvoyant en sortie le réel $F(x)$.
2. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, déterminer l'expression de $f = F'$, puis justifier que
$$f' : x \longmapsto \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}.$$
3. Dresser le tableau de variations des fonctions f et F sur $\mathbb{R}$. On fera apparaître les limites aux bornes.
4. Déterminer la parité des fonctions f et $F - \frac{1}{2}$.
5. Sur un schéma, tracer l'allure de la courbe de F, en faisant apparaître tous les éléments remarquables (asymptotes, points d'inflexion notamment).
6. Justifier que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I (à déterminer), et donner l'expression de F^{-1} la fonction réciproque de F.

Partie 2

7. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge.

On admet que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

8. Justifier que f est une densité de probabilité, et que F est la fonction de répartition associée.

Dans cette partie et dans la suivante, on note X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ dont la fonction de répartition est F, et dont f est une densité.

9. Justifier que X admet une espérance et une variance.
10. (a) En utilisant un résultat obtenu à la question 4 et à l'aide d'un changement de variable, montrer que
$$\int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x.$$
    (b) En déduire la valeur de $E(X)$.
11. Justifier que
$$V(X) = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2e^x}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x,$$
    puis que
$$V(X) = 4\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x.$$
12. Pour tout entier naturel n non nul, justifier la convergence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x$.
13. Montrer que
$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad V(X) = 4\left(\sum_{n=1}^{N}\left((-1)^{n-1}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x\right) + (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x)\mathrm{d}x\right),$$
    où $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ R_N(x) = \dfrac{xe^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}$.

14. (a) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ |R_N(x)| \leqslant x e^{-(N+1)x}$.
    (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_N(x)\mathrm{d}x \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
15. Déduire de toutes les questions précédentes que $V(X) = \dfrac{\pi^2}{3}$.

Partie 3

Dans cette partie, on considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, toutes de même loi que X.

On admet que X^2 admet une variance et que $V\left(X^2\right) = \dfrac{16\pi^4}{45}$.

16. Montrer que $V_n = \dfrac{1}{n}\left(X_1^2 + \cdots + X_n^2\right)$ converge en probabilité vers $\dfrac{\pi^2}{3}$.
17. Construire une variable aléatoire T_n qui converge en probabilité vers π. On justifiera précisément le résultat.
18. Montrer que si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$, alors $F^{-1}(U)$ suit la même loi que X, où la fonction F est définie dans la partie 1.
19. La bibliothèque `numpy.random` est importée sous la dénomination `rd`.
    On rappelle que la commande `rd.random()` renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 selon une loi uniforme sur $[0,1[$.
    Écrire une fonction en langage Python, nommée `realisation_X`, ne prenant aucun argument en entrée et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire X.
20. Écrire une fonction en langage Python, nommée `estimation_pi`, prenant un entier naturel n en entrée et renvoyant une estimation de π à l'aide de la question 17.
21. (a) Montrer qu'il existe un réel positif z tel que $\Phi(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = 0,975$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
    On admet que $z \leqslant 2$, ainsi que $\pi \leqslant 4$.
    (b) Montrer que
    $$P\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leqslant z\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,95.$$
    (c) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de $\dfrac{\pi^2}{3}$ au niveau de confiance 95%, ne dépendant ni de π, ni de z.
    (d) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de π au niveau de confiance 95%.
22. Dans la figure 2, on a tracé l'évolution, en fonction de n, de l'estimateur et de l'intervalle de confiance construits précédemment. Commenter la figure obtenue au regard des questions précédentes.

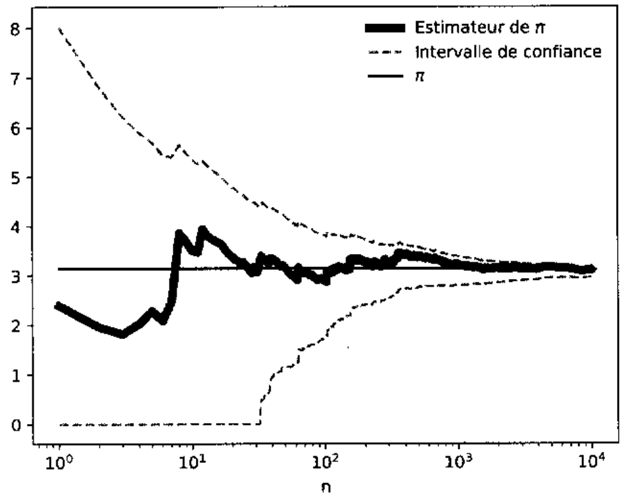


FIGURE 2 – Estimation de π

23. Pour toutes les valeurs de n entre 1 et 10^3, on a répété 100 fois l'expérience précédente, et on a tracé dans la figure 3 la proportion de fois où π appartient bien à l'intervalle de confiance proposé (en traits plein), ainsi que la limite de 95% (en traits hachurés). Commenter la figure obtenue.

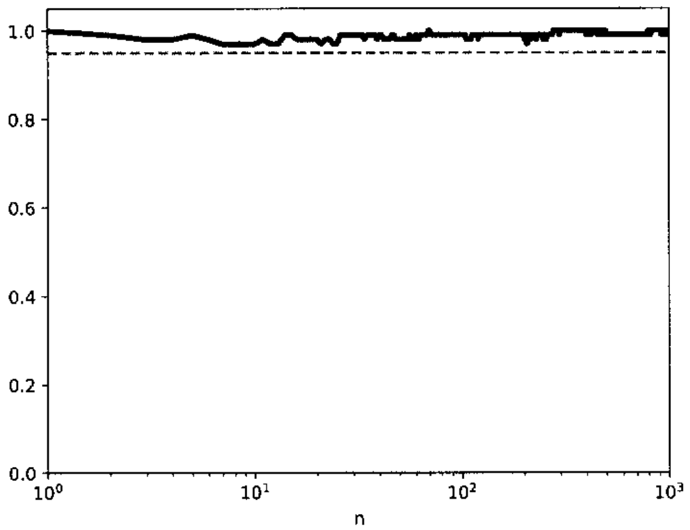


FIGURE 3 – Évaluation de la qualité de l'intervalle de confiance